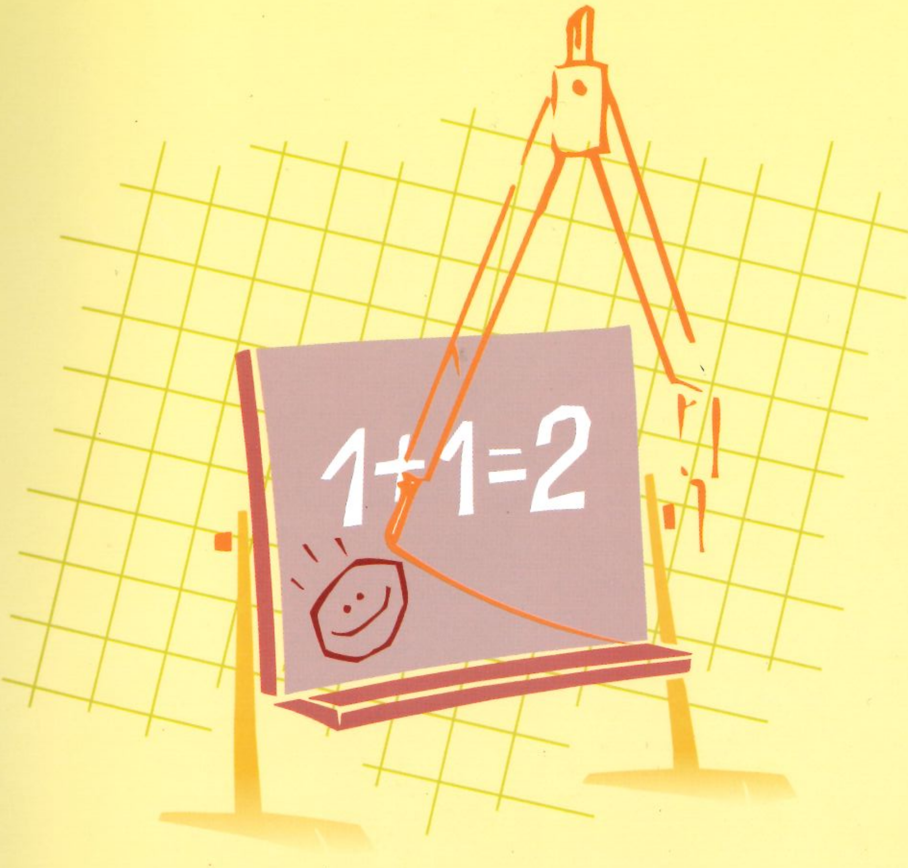
El muro de cristal

Por qué las matemáticas parecen tan difíciles

Frank Smith



EL MURO DE CRISTAL

Por qué las matemáticas parecen tan difíciles

FRANK SMITH

Traducido del original en inglés por Aurora Caparrós Cayuela

Título original de la obra:
The Glass Wall

1ª edición Morón (Sevilla), Febrero de 2005

Apdo. 117
41350 - Morón (Sevilla)
Telf./Fax: 955 854 850
email: kikiriki@cooperacioneducativa.com
web: www.cooperacioneducativa.com

Depósito legal:
I.S.S.N. de la colección: 1134-3265
ISBN de la obra: 84-89042-41-1

Imprime: I.G.N. Grafidós S.L.
Telf. 955 853 563
Fax: 955 854 946
C/ Río Segura, 4
Morón de la Frontera (Sevilla)

ÍNDICE

PRÓLOGO

¿Qué hace que las matemáticas sean posibles? ¿Qué hace que las matemáticas sean confusas? ¿Por qué las matemáticas ponen nerviosas y provocan inseguridad a tantas personas? ¿Es posible que sea erróneo el modo de enseñar las matemáticas y cómo se habla de ellas?

Estas preguntas forman parte de un complejo estudio que he realizado sobre otras destrezas intelectuales del ser humano: lenguaje, escritura, lectura, pensamiento y aprendizaje. Aquí me centro sobre todo en cómo se habla de las matemáticas, porque el lenguaje es una fuente frecuente de confusión cuando tenemos que explicar las actividades mentales del ser humano.

No estoy diciendo que tuviera todo ya planeado cuando empecé mi investigación hace más de diez años. Entonces solamente tenía un vago concepto de las matemáticas y apenas había tenido en cuenta su relación con otros aspectos del pensamiento humano. No tenía plan alguno salvo sumergirme lo más posible en los libros, la reflexión y las conversaciones sobre las matemáticas. Y cuando lo hice, empecé a comprender por qué los que son consumados matemáticos piensan que lo que yo ahora llamo el mundo de las matemáticas es tan convincente y maravilloso. Además también pude comprender por qué a muchas personas les resulta tan frustrante entrar en ese mundo; por qué tan a menudo, antes o después, chocan contra un muro invisible.

Las matemáticas no son necesariamente complicadas o difíciles, tampoco son algo accesible solamente a una pequeña elite intelectual. Las matemáticas deberían estar al alcance de todo el mundo, siempre y cuando no se interpusieran obstáculos imprevistos.

Soluciones a problemas olvidados

He llegado a pensar que las matemáticas son un continente enorme, desconocido, pero con formidables recursos. La gente ha entrado en este continente por distintos puntos, en diferentes momentos, siguiendo distintas rutas y descubriendo distintas zonas, pero al final han empezado a predominar algunos caminos y el mapa de algunas regiones está ya muy bien trazado. Se podría hacer una crónica de esta exploración teniendo en cuenta lo descubierto, la geografía de las matemáticas, y es lo que muchos estudiosos han hecho. Otros han documentado la historia de algunos de los mejores exploradores. Se podría inspeccionar el terreno según los recursos de las matemáticas y los usos que se han encontrado para ellas. También se podrían escribir guías y libros de consulta sobre cómo pueden los recién llegados acceder al territorio de las matemáticas y explotar los recursos por sí mismos. Se podría escribir sobre el tipo de problemas que las personas tenían que resolver para explorar el territorio, las autopistas y puentes que tenían que construir y los obstáculos que tenían que salvar.

La orientación que he decidido seguir es la de la resolución de problemas, pues considero el desarrollo de las matemáticas como una historia de personas – de estudiantes y de expertos – intentando entender algo más sobre los números y sobre cómo los números se relacionan entre sí y con el mundo físico (incluyendo especialmente las relaciones espaciales).

Las matemáticas actuales incluyen una gran cantidad de soluciones a los problemas hallados y solucionados en el pasado. Las soluciones por sí mismas pueden ser una fuente de confusión para los recién llegados que no conocen los problemas originales, convirtiéndose todo de esta manera en algo arbitrario. En vez de intentar entender la geografía básica, deben encontrarle sentido a la infraestructura, al complejo sistema de carreteras y puentes que pueden ocultar el territorio real.

El camino que finalmente he seguido en mi viaje para comprender qué hace que las matemáticas sean posibles, pero además difíciles, es el siguiente:

¿Qué se puede decir en general sobre el territorio que estamos explorando? (Capítulo 1: ¿Qué son las matemáticas?)

¿Cuál es el equipamiento – mental – que todas las personas necesitan para explorar un nuevo territorio? (Capítulo 2: Dar sentido)

¿De dónde vienen los números? (Capítulo 3: Las matemáticas en el Lenguaje)

¿A dónde van los números? (Capítulo 4: El significado de los números)

¿Por qué los números son cómo son? (Capítulo 5: Números (I): los nombres; capítulo 6: Su representación escrita)

¿Qué cosas básicas se pueden hacer con los números? (Capítulo 7: Designar, ordenar y cuantificar; capítulo 8: Calcular y medir)

Cómo no perderse. (Capítulo 9: Notación – puntos de referencia en el mundo de las matemáticas)

Los diferentes aspectos de los números (Capítulo 10: Números entre números; capítulo 11: Números en el espacio)

¿Cuáles son las mejores formas de trabajar con los números? (Capítulo 12: Memorizar, calcular y consultar)

¿Cuál es la mejor forma de estudiar? (Capítulo 13: Traspasar el muro de cristal)

¿A quién va dirigido este libro?

Espero que este libro proporcione un conocimiento profundo a los lectores interesados en las matemáticas, a quienes les gustaría conocer mejor cómo aprender matemáticas (o cómo enseñarlas), o que pudieran estar interesados en llegar a comprender porqué es tan difícil aprender matemáticas (o enseñarlas). La discusión podría interesarles a los profesores implicados en cualquiera de los aspectos de la enseñanza primaria, a cualquiera que tenga que ver con las matemáticas, el lenguaje, el pensamiento y el potencial del cerebro humano (o mejor dicho, de los seres humanos) en general.

No trato en este libro de poner de manifiesto cómo deberían enseñarse las matemáticas, excepto por la constante reiteración de que se deben aprender con la comprensión. No existen testimonios sobre métodos o materiales específicos, porque a la larga no sirven. Lo que marca la diferencia en el aprendizaje es la comprensión, no cómo las matemáticas se relacionan con el mundo físico, sino los tipos de relaciones que existen dentro de las matemáticas. Lo que marca la diferencia en la enseñanza es conocer lo que cada estudiante encuentra interesante y comprensivo, más que frustrante y difícil. La enseñanza y el aprendizaje dependen del conocimiento compartido, que no es algo que los métodos y materiales didácticos puedan generar o que las guías curriculares puedan decretar.

No es necesario que seas un matemático para leer este libro. Salvo unas pocas excepciones, no existen gráficos, ecuaciones, fórmulas, símbolos exóticos o cálculos complejos. Examino aspectos del lenguaje y de las matemáticas para los lectores que no son ni lingüistas ni matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

A Mary-Theresa Smith, como siempre, por su inteligente revisión y las sugerencias tan constructivas;

A Kart Nyberg, mi editor, por hacer lo imposible para que mi texto fuera coherente, especialmente las fracciones, las notaciones matemáticas y los diagramas;

A Bryant Fillion, Constante Kamii, Stephen Krashen y Judith Newman por los años de buena amistad y magníficos consejos;

A los innumerables autores que me han ayudado a pensar sobre los temas de este libro, normalmente antes de que yo supiera que lo estaba escribiendo.

INTRODUCCIÓN

Para empezar, déjenme resumir lo que examinaré detalladamente a lo largo del libro. Voy a hablar de dos mundos diferentes, el mundo físico y el mundo de las matemáticas; y sobre el muro de cristal que existe entre ambos.

El mundo físico es nuestro mundo familiar de objetos y acontecimientos, directamente accesible a nuestros ojos, oídos y otros sentidos. Todos tenemos un lenguaje para movernos por el mundo físico y para hacer afirmaciones sobre él. A este lenguaje cotidiano se le suele llamar natural, no porque los demás tipos de lenguaje no lo sean, sino porque es un lenguaje que enriquecemos hablándolo, siempre que tengamos la oportunidad de escucharlo hablar a nuestras familias y amigos durante nuestra niñez.

Uso metafóricamente la palabra "*mundo*" para hablar de las matemáticas porque éste es un ámbito totalmente diferente del mundo físico. (Usé una metáfora distinta en el prólogo cuando me referí a las matemáticas como un enorme continente apenas explorado). A las matemáticas se las puede considerar un mundo porque tienen un paisaje que debe explorarse, donde se pueden hacer descubrimientos y de donde se pueden extraer recursos. Puede suscitar todo tipo de emociones. Pero no es parte del mundo físico que conocemos, y requiere de diferentes tipos de mapas, de diferentes conceptos y de un lenguaje distinto. El mundo de las matemáticas no surge del mundo físico (es lo que yo defiendo).Exceptuando la parte que hunde sus raíces en nuestra cabeza, las matemáticas constituyen un mundo aparte. Entre el mundo físico y el mundo de las matemáticas siempre habrá una separación, no importa el esfuerzo que hagamos por acercarlos ni que demos por hecho su interrelación.

El lenguaje que usamos para hablar del mundo de las matemáticas no es el mismo que el que usamos para hablar del mundo físico. Pero los problemas surgen porque el lenguaje de las matemáticas a menudo parece y suena igual que el lenguaje natural. Se pueden usar las mismas palabras y frases en ambos lenguajes, pero tienen significados distintos, dependiendo de si se usan para describir aspectos del mundo físico o aspectos del mundo de las matemáticas. Esto puede ser motivo de gran confusión. "*El cinco es un número primo*" es una afirmación propia del lenguaje matemático. "*Aquí hay unos plátanos maduros*" es una afirmación que pertenece al lenguaje natural. "*Aquí hay cinco plátanos*" es una afirmación que mezcla el lenguaje natural con el lenguaje de las matemáticas. "*Cinco*" puede parecer una palabra propia del lenguaje diario, pero su significado se encuentra en el mundo de las matemáticas, no en el mundo de los objetos físicos.

Por último, el muro de cristal es una barrera que separa el mundo físico y su lenguaje natural del mundo de las matemáticas. La barrera existe solamente en nuestra mente, pero aún así puede resultar impenetrable. Chocamos con el muro siempre que tratamos de entender las matemáticas a través del mundo físico y su lenguaje. Nos quedamos detrás del muro siempre que nos aventuramos a entender el mundo de las matemáticas. En cualquier momento, desde que empezamos a relacionamos con las matemáticas, nos encontramos obstaculizados por el muro de cristal, por fuera mirando hacia adentro.

Estos son los puntos esenciales, el resto es elaboración.

Una cuestión de lenguaje

En el libro veremos cómo pueden surgir enormes problemas cuando nos acercamos a las matemáticas como si fueran parte del lenguaje natural. Tratar de hacerse entender uno mismo a través de las matemáticas puede resultar desconcertante. Y encontrarse perdido en un entorno incomprensible produce aversión y puede crear fobias.

Las matemáticas no son un lenguaje, al menos no el tipo de lenguaje que estudian los lingüistas. Tienen una gramática y un vocabulario muy distintos a los de los lenguajes naturales, al menos distintos de los del lenguaje que aprendemos a hablar con relativa fluidez en los primeros años de nuestra vida. Las matemáticas no se traducen directamente a ningún otro lenguaje natural. Si queremos llamar lenguaje a las matemáticas – porque podemos usarlo para comunicar ideas – entonces estamos usando la palabra "*lenguaje*" metafóricamente.

Nuestro entorno físico y las matemáticas son mundos aparte. No hay nada que objetar con respecto a esto. La música es también otro tipo de lenguaje. Tiene sus propios mundos que explorar, su propia gramática y su propio vocabulario y no se puede traducir al lenguaje natural – o a las matemáticas, si a eso vamos – a pesar de que puede emocionar igualmente.

Para entender y apreciar la música, hay que introducirse en ella. Para entender y apreciar las matemáticas, hay que sumergirse en ellas. El lenguaje diario es de ayuda limitada a la hora de llegar al corazón de la música o al de las matemáticas y puede originar confusión y frustración.

La autoridad de los números

Las matemáticas a menudo tienen el poder de hacernos creer que son parte del mundo físico. Cuando alguien nos dice que hay cuatro huevos en un cesto, podemos ver cuatro huevos en un cesto, al parecer de la misma forma que podemos ver huevos marrones o huevos pequeños, pero ¿cómo le da el ser humano sentido a los números? La numeridad – numeridad no es una propiedad física de los huevos, como el color o el tamaño. ¿De dónde sacamos la idea de los números, si no es del lenguaje?

La mayoría de las discusiones sobre las matemáticas, incluso las que tienen que ver con enseñar aritmética básica a principiantes, dan por hecho el conocimiento de los números. A los niños se les enseña a "*contar*", en el sentido de recitar una secuencia breve de números en el orden correcto y además en el sentido de aplicar apropiadamente esas palabras a colecciones de objetos reales. A los niños además se les "*enseñan*" unas pocas formas simples donde los números se relacionan unos con otros – por ejemplo, que dos veces tres unidades son seis -. Estos "*hechos*" matemáticos se discuten de forma discursiva con palabras, a menudo acompañándolas con ejemplos "*concretos*", como dos grupos de tres objetos. Pero nada de esto tiene sentido si el oyente es incapaz de entender a qué se refieren las palabras que designan números. Esta comprensión subyacente nunca se explica.

En este libro examino en primer lugar cómo los números adquieren sentido, y por qué algunas personas pueden avanzar desde la más elemental comprensión de los números hasta llegar al más complejo pensamiento matemático, mientras que para otras es difícil ir más allá de los inseguros primeros pasos matemáticos[1].

Mi principal preocupación es cómo se relacionan el lenguaje natural y las matemáticas. (Por tanto, hablaré de "*lenguaje*" cuando me refiera al lenguaje natural, al de cada día. Cuando me refiera al lenguaje de las matemáticas, haré mención expresa de él). ¿Son parte de la misma empresa mental o son diferentes, en cuanto que ese lenguaje y las matemáticas son separados como asignaturas en el aula y como temas en las estanterías de las bibliotecas? ¿Tienen el lenguaje y las matemáticas la misma raíz? ¿Aprenden los niños a hablar y a hacer matemáticas a la misma vez? Y cuando el lenguaje y las matemáticas se separan, ¿cómo ocurre?

Casi todo el mundo aprende a hablar, de una forma muy selectiva. Existen unas 10.000 lenguas diferentes en el mundo y casi todas las personas aprenden a hablar y a comprender en una al menos. Este es un logro intelectual considerable. ¿Por qué las matemáticas suponen un obstáculo con-

1.- Las matemáticas en la actualidad son mucho más que números, pero los números fueron el principio de las matemáticas y son la forma en la que todo el mundo se relaciona con las matemáticas. No existe razón en este libro por la que aventurarse más allá del umbral numérico.

siderable para algunas personas que han dominado las complejidades del habla, la escritura y la lectura, siendo éstas bastante más abstractas?

La apariencia engañosa de lo obvio

Uno de mis objetivos es investigar los aspectos de las matemáticas que se dan por sentados, que pueden parecer "*obvios*" o de "*sentido común*". ¿Cómo alcanzamos dicha certidumbre? ¿Y cuál era nuestro punto de vista antes de que lo obvio fuera tal?

He aquí un ejemplo simple que volveré a estudiar en profundidad posteriormente:

El significado del número "*tres*" (o 3) normalmente se explica mostrando tres lápices y diciendo, "*Esto significa tres*" o "*esto son tres*". Eso es obvio, de sentido común. El concepto matemático se explica a través del lenguaje y la demostración.

Pero en realidad, mostrar tres objetos para ilustrar el significado de la palabra tres no explica nada en absoluto, a menos que ya se conozca lo que significa "*tres*". Para alguien que no esté familiarizado con el concepto de tres, que no haya aprendido los que los números significan, la afirmación "*Aquí hay tres lápices*" da por hecho lo que se supone que ilustra. ¿Por qué una persona que no esté familiarizada con los números debería pensar que la cantidad es lo que los tres lápices se supone que representan (en oposición a que están hechos de madera, que son instrumentos de escritura, de color amarillo)?. La "*explicación*" es como enseñarle un lápiz a una persona ciega para explicarle lo que significan las palabras "*amarillo*" y "*color*".[2]

Otro ejemplo: ¿Cuál es el opuesto a "*más*"? El sentido común nos dice que la respuesta es "*menos*". Pero ese ejemplo concreto de sentido común es algo que hemos adquirido en el contexto de las matemáticas. Para un niño, el opuesto de "*más*" normalmente es "*nada más*" o "*nada*".[3] Los padres que no le dan a un niño algo cuando pide más de ello tampoco le quitan lo que ya tiene. Los profesores que tratan de decirle a un niño que el opuesto de más es menos se encontrarán con una mirada de extrañeza.

Mientras consideramos que algo es obvio, estamos ignorando la inteligencia que fue necesaria para hacer que algo fuera evidente. A la raza humana le hicieron falta muchos siglos para establecer un sistema conceptual con el que comprender qué quiere decir una persona cuando se refiere a "*tres lápices*" o a "*menos de tres*". Los niños normalmente adquieren esa idea con relativa rapidez, pero no porque las ideas sean de sentido común. Las ideas todavía representan un paso de gigante para la mente humana.

El muro de cristal

Mientras que algunas partes de las matemáticas parecen obvias, otras son – para muchas personas – sorprendentemente oscuras.

En un determinado momento, para muchas personas (incluido el autor), las matemáticas pasan de ser una cosa evidente a ser algo denso e impenetrable. La transición suele ser abrupta. Planeamos por un libro de texto como un pájaro por el espacio abierto, y de repente chocamos contra un muro de cristal. No podemos entender la naturaleza del obstáculo porque no podemos pasar al otro lado. Lo único que sabemos es que hemos ido lo más rápido que podíamos, al menos por el momento. Podemos intentar rodear el obstáculo con determinación y memoria, pero no podremos saber dónde estamos y cómo podríamos avanzar. Nuestras mentes están estancadas en el mundo físico.

2.- Incluso los matemáticos pueden hacer esta afirmación. KEITH DEVLIN abre su maravilloso libro *Mathematics: The Science of Patterns* (1997) con la afirmación improvisada: "*Reconocer el modelo que llamamos "calidad de tres" es reconocer qué es lo que tienen en común tres manzanas, tres niños, tres rocas". "¿Ves el modelo común?", puede preguntar un padre a un hijo, mostrándole distintas colecciones de tres objetos*" (p. 9). Más información sobre esto en el capítulo 3.

3.- WALKERDINE (1988). En otro lugar, ella señala que "*volumen*" puede no ser para un niño un concepto de capacidad, sino uno de los botones del mando a distancia del televisor (WALKERDINE, 1982).

Las matemáticas, dentro y fuera de la cabeza

Las matemáticas se pueden encontrar en dos lugares. Una pequeña parte está afianzada en nuestra cabeza (o en el lenguaje cotidiano) y una parte bastante más grande constituye un mundo aparte.

La parte que está en nuestra cabeza es verdaderamente muy limitada, bien seamos los niños que se encuentran en el umbral del aprendizaje de las matemáticas o bien seamos los más experimentados profesionales de las matemáticas. Ésta comprende unos pocos conceptos básicos que ya están establecidos en el lenguaje hablado, un contraste rudimentario de números (básicamente uno y más de uno) y un sentido muy general de la cantidad (ser capaz de ver que tres objetos son diferentes de dos objetos, sin la destreza para contar el número de objetos). Puede que esto no sea gran cosa, pero es la base de todo el conocimiento matemático que haya sido descubierto y de todas las técnicas matemáticas que se hayan podido inventar.

El resto es accesible a nuestro conocimiento sólo en la medida en que nos aventuremos en sus dominios. La sucesión infinita de números a la que podemos acceder es esencialmente incomprensible fuera de las matemáticas, como lo son todos los procedimientos que se pueden llevar a cabo con ellas. Podemos aprender cómo usar los números y podemos realizar cálculos y otras operaciones con ellos, normalmente con grandes beneficios personales. Podemos recordar multitud de hechos matemáticos. Pero comprenderlos a través del lenguaje cotidiano es algo que está fuera de nuestra capacidad. Las matemáticas solamente pueden comprenderse matemáticamente.

No hay nada raro en esta limitación. Existen multitud de cosas con las que nos familiarizamos, a las que respondemos intelectual y emocionalmente y que podemos predecir e incluso explotar, que están "*fuera*", que son parte de un mundo externo a nuestra cabeza: como son los planetas, el tiempo, los océanos. Como es la música. Como son las cosas que el hombre fabrica: arquitectura, coches, ordenadores. Si queremos saber más de todo esto, tenemos que mirar fuera, a los objetos en sí mismos, no dentro de nuestra mente. Podemos pensar en ellos, pero siempre son algo externo a nosotros.

El lenguaje natural no es así. El lenguaje tiene una relación especialmente íntima con la mente humana. Los significados que les damos a las palabras y a los enunciados provienen de nuestro interior; están directamente unidos a pensamientos que existen o son inherentes a nuestra mente y a las emociones que los secundan. No solamente podemos entender el lenguaje, sino que ese lenguaje en nuestra mente es la base de nuestra comprensión del mundo físico y de nuestras relaciones con todo y con todos.[4]

Pero este lenguaje no es capaz de proporcionar una comprensión de las matemáticas, mas que hasta un punto limitado – una vez más, solamente como "*uno*" y "*más de uno*", y sólo de forma aproximada aunque eficaz. La enorme cantidad de matemáticas, exceptuando el pequeño fragmento que se basa en el lenguaje, es inaccesible si no es a través del mundo de las matemáticas. Podemos pensar en el resto de las matemáticas, pero solamente a través del pensamiento sobre las matemáticas.

Es una idea compleja y poco conocida, y radical, el que solamente una parte muy pequeña de las matemáticas se puedan ver a través del lenguaje cotidiano. La idea se desarrollará a través de todo el libro.

4.- La palabra mente y la palabra cerebro aparecen con frecuencia en mis discusiones. Los pedantes argumentan que existe una diferencia entre mente y cerebro, que el cerebro es un órgano y la mente una función de ese órgano o que el cerebro existe en el mundo físico y la mente en un mundo mental. Algunos afirman que la mente es una ficción construida por el cerebro (o que el cerebro es una ficción construida por la mente). Por otra parte, muchas lenguas no hacen distinción entre las palabras mente y cerebro, ahorrándoles a sus hablantes el problema de tener que pensar sobre tales asuntos. La distinción entre mente y cerebro es lingüística, una cuestión de convenciones. Las definiciones que aparecen en el diccionario no revelan nada sobre la fisiología y la psicología del pensamiento y el comportamiento humanos.
Nuestra lengua es especialmente rica en usos diferentes y a veces yuxtapuestos para las palabras mente y cerebro. Decimos "*tener algo en mente*" pero les decimos a los demás que "*usen su cerebro*". Decimos "*lavar el cerebro*" pero "*traer algo a la mente*". Es muy normal en estos tiempos hablar de aprendizaje, pensamiento y comprensión mental, pero esto es más metafórico que científico (y se dice simplemente para que suene a científico). Sería igualmente apropiado y más apto hablar de aprendizaje, pensamiento y comprensión personal, en vez de mental. Las formas coloquiales en que se han usado las palabras mente y cerebro surgen de una casualidad lingüística.

CAPÍTULO 1

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?

Es muy lícito que se me pregunte exactamente de qué estoy hablando cuando uso la palabra "*matemáticas*" y debo responder que no lo sé exactamente. No es una negligencia por mi parte, espero, sino una evidencia del hecho de que el lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas son fundamentalmente diferentes.

Los aspectos semánticos surgen inevitablemente con el lenguaje natural. El lenguaje de las matemáticas nunca es ambiguo y nunca existe duda alguna sobre lo que un enunciado matemático quiere decir.[5] La palabra "*matemáticas*" no es un término matemático, sino una parte del lenguaje natural.[6] Cuando digo que es imposible entender las matemáticas a través del lenguaje natural (en oposición al lenguaje de las matemáticas), no es porque haya algo peculiar en las matemáticas. La ambigüedad y la imprecisión son inevitables en el lenguaje natural y esa es la razón por la que las matemáticas, la música, la informática, los juegos de cartas tienen que tener lenguajes especiales; no admiten la ambigüedad propia del lenguaje cotidiano.

Preguntemos a los matemáticos qué son las matemáticas[7] y obtendremos múltiples respuestas. Nos dirán que las matemáticas son la ciencia de los números o el estudio de las combinaciones o un lenguaje o un tipo de lógica, un arte, un sistema de símbolos y reglas, una herramienta, incluso una disciplina mental. Todas estas respuestas son válidas en cuanto descripciones parciales. Son medios metafóricos de mirar las matemáticas (como mi referencia a las matemáticas como un mundo). Pero ninguna explica qué son las matemáticas. Ninguna de estas afirmaciones encierra lo que podría llamarse la esencia de las matemáticas, desde luego no hasta el punto de informar a cualquiera que no hubiera tenido contacto alguno con las matemáticas; un niño, por ejemplo. En otras palabras, el lenguaje no nos dice gran cosa sobre las matemáticas como un todo, al menos no más de lo que dice con respecto a la música.

Los diccionarios no son de gran ayuda. Los diccionarios ofrecen descripciones y ejemplos de cómo se usan las palabras, pero no ofrecen una visión de aquello a lo que hacen referencia (ver nota 4). Ni siquiera garantizan la existencia de aquello a lo que las palabras se refieren. Mi diccionario des-

5.- Las afirmaciones matemáticas no son ambiguas pero pueden referirse a una o más situaciones matemáticas. La raíz cuadrada de cuatro (o 2 o -2) es una incógnita pero no una ambigüedad.

6.- No quiero sugerir que la imprecisión del lenguaje natural sea un defecto. Los límites permeables permiten el crecimiento, la novedad y la eterna posibilidad de decir algo nuevo. En realidad, los especialistas en algunas recónditas áreas de las matemáticas han introducido la noción de "*lógica difusa*" para permitir ir más allá de las limitaciones que la estricta lógica matemática impondría en ellas (McNeill y Freiberger, 1993).

7.- La "*s*" de la palabra "*matemáticas*" puede dar lugar a pensar que es un nombre colectivo: "*las matemáticas son*" en vez de "*la matemática es*"; pero el sufijo "*icas*" es singular y hace mención a un área de estudio o de interés común y se deriva de los sufijos griegos y latinos que significan "*perteneciente a*". La "*s*" no está presente en palabras como música, aritmética y lógica, aunque la derivación semántica del sufijo tiene el mismo origen la transición de "*ica*" a "icas" tuvo lugar cuando los especialistas académicos empezaron a demarcar los territorios que deseaban para sí mismos, sobre todo en el siglo XVI.

cribe criaturas imaginarias. También define verdad, belleza, justicia y ética, que tampoco son cosas cuyas esencias se puedan inspeccionar personalmente o sobre las que las personas puedan llegar a un acuerdo. Nadie puede apelar a un diccionario como autoridad en cuestiones teóricas o filosóficas.

En mi diccionario, la definición de matemáticas alude a una "*ciencia abstracta de las cantidades*" que reúne tres "*ciencias*" más específicas – geometría (que tiene que ver con "*la medición del espacio*"), aritmética (relacionada con los números y el cálculo)[8] y álgebra (que tiene que ver con la relación entre símbolos). Es posible que todo esto sea verdad, según parece, pero no va muy lejos. La geometría, la aritmética y el álgebra no son territorios exclusivos o comprensivos de pensamiento o actividad; se solapan, y dejan fuera otras áreas significativas de las matemáticas. Además, con toda seguridad las matemáticas son más que una ciencia o un conjunto de ciencias. Son algo que todas las personas hacen y de lo que saben algo, incluso sin ser científicos ni proclamarse matemáticos.

El filósofo y matemático Bertrand Rusell tenía una breve respuesta para la pregunta de qué son las matemáticas: es lo que hacen los matemáticos. Pero una vez más, las personas que no son matemáticos hacen matemáticas. Si uno puede hablar, es prácticamente imposible que ignore las matemáticas. Las matemáticas no son tanto una forma particular de comportamiento como una enorme cantidad de formas particulares de actividad (al igual que escribir puede ser componer un poema con un bolígrafo o rellenar la devolución de los impuestos en un ordenador).

Obviamente, una gran parte de las matemáticas tiene que ver con los números, el tema de este libro. La esencia de este aspecto de las matemáticas yace no tanto en lo que se puede hacer con los números como en las relaciones que existen entre ellos – qué tienen el 1, 2, 3 y todos los demás números que los hace tan productivos cuando se usan juntos en el cálculo, con una precisión y fiabilidad únicas en la experiencia humana.

Existen otros aspectos de las matemáticas que no tienen nada que ver con los números. Algunos de los aspectos implican relaciones espaciales (que tienen que ver, por ejemplo, con las formas, la velocidad, la dirección o las superficies y los agujeros). Muchas personas creen que es útil pensar en los números en términos espaciales. Otros aspectos tienen que ver con relaciones lógicas (por ejemplo, que si A es mayor que B, y B es mayor que C, entonces A debe ser mayor que C). Los números pueden analizarse en términos de relaciones lógicas sin un cálculo preciso.

No sorprende que ni los matemáticos ni los diccionarios sean capaces de definir la esencia de las matemáticas. "*Matemáticas*" es una palabra; eso es todo. Y al igual que muchas palabras, se puede usar en multitud de formas. Podemos examinar algunas de las cosas que se han hecho en nombre de las matemáticas, y reflexionar sobre lo que las hizo posibles, pero esforzarnos en definir con exactitud lo que constituye las matemáticas no nos llevará a ninguna parte.

Los significados de "Matemáticas"

La palabra matemáticas tiene múltiples significados. Para empezar, se puede referir a lo que las personas hacen o a lo que saben. Muchas personas participan en actividades de naturaleza matemática sin ser conscientes de ello, por ejemplo, cuando dan, llegan a la conclusión de que si gastan parte de su dinero, les quedará menos, o que el peso de una parte de la balanza está relacionado con el peso de la otra parte. Lo hacen sin saberlo. Por otra parte, muchos de nosotros podemos recitar conocimientos matemáticos que nunca hemos usado, relacionados tal vez con el tan nombrado cuadrado de la hipotenusa o la identidad de algunos números primos o las raíces cuadradas. Estos son datos incrustados en nuestra memoria más que destrezas reflejadas en resultados, como las fechas de las antiguas batallas aprendidas de memoria. Las conocemos sin haber hecho nada.

Obviamente, algunas personas conocen más datos de naturaleza matemática que otras, aunque

8.- La aritmética solía ser lo que los niños hacían en la escuela, una de las tres Reglas. la hipérbole educativa ha exagerado la lectura, escritura y aritmética y las ha convertido en capacidad de leer y escribir, destrezas para la comunicación y matemáticas.

es probable que no existan dos personas que sepan lo mismo. Y tampoco es muy probable que haya dos personas que tengan el mismo repertorio de destrezas. Y hay muchas más matemáticas de las que cualquier individuo pueda conocer. Dudo mucho de que todas las personas del mundo juntas puedan conocer todas las matemáticas que existen en todos los libros de matemáticas, revistas y sitios de Internet en la actualidad.

Nadie podría decir que las matemáticas que existen en los libros y en cualquier otra fuente agotan todas las matemáticas que existirán. La evidencia es la contraria. Las publicaciones profesionales sobre temas matemáticos proliferan, tanto en formato impreso como electrónico. Nadie es capaz de leer todo lo que se publica. En realidad, cuanto más conocimiento matemático se desarrolle, mayor es la ignorancia relativa existente.

Por lo tanto, existen cuatro modos generales de usar las matemáticas:

1. "*Matemáticas*" puede referirse al conocimiento que los individuos poseen de una naturaleza matemática, en relación – por ejemplo – con las tablas de sumar y multiplicar; la naturaleza de los números impares, pares y primos; los porcentajes; los exponentes; las raíces y las ecuaciones cuadradas. Es posible que algunos datos que los individuos poseen no se encuentren en textos matemáticos, que no tengan un estatus formal. Las Matemáticas en el sentido de "*conocimiento*" deberían dejar de considerarse una ciencia; son un conjunto de cosas que los individuos conocen (o creen).

2. "*Matemáticas*" también puede hacer referencia a las destrezas que las personas ejercitan en determinadas circunstancias. Los diferentes individuos pueden tener diferentes repertorios de destrezas, que además pueden diferir de los procedimientos establecidos formalmente en los textos matemáticos, al igual que la forma en que los individuos hablan y escriben pudiera ser muy diferente de los ejemplos que aparecen en los libros de gramática. Las matemáticas en este sentido "*operativo*" no son – una vez más – una ciencia; son una variedad de cosas que la gente hace.

3. "*Matemáticas*" puede referirse a todo lo que en algún momento se haya dicho sobre un tema matemático. Esto es literalmente un "*mundo de las matemáticas*" puesto que existe independientemente de los individuos, y existiría en los libros y en otros medios, disponibles para ser decodificados y redescubiertos tal vez por visitantes de otros planetas si no quedara humano alguno en la tierra.

4. "*Matemáticas*" puede referirse a los reinos potenciales de conocimiento y poder que se extienden más allá de cualquier punto que los aventureros humanos hayan podido alcanzar, pero a los que sin duda alguna pueden llegar y explorar.

Cualquiera puede ser matemático, incluso sin conocer ni comprender las fórmulas matemáticas que aparecen en los textos y que se exponen en las aulas. Todo el mundo es sensible a "*una cosa después de la otra*" que es la base de las matemáticas numéricas. Podemos calcular, comparar, contrastar y calcular (aunque no usemos el sistema numérico convencional); podemos reconocer igualdades y diferencias.

Muchas personas pueden calcular su cambio – e incluso calcular balances de beneficios y pérdidas y márgenes de interés – de acuerdo con sistemas que ellos mismos han inventado, aún cuando no puedan entender los mismos conceptos abstractos que aparecen en los libros.[9] Las matemáticas no son algo que se le imponga o se le inserte a las personas; provienen de ellas. Las matemáticas que aparecen en los libros de texto no son una descripción de cómo la gente en verdad piensa y hace matemáticas. Tal vez son necesarios términos nuevos para "*hacer matemáticas*", "*ser matemático*" o "*comprender las matemáticas*" para distinguir el acto de la abstracción (al igual que tenemos términos diferentes para los actos de "*hablar*" y "escribir" para distinguirlos de las abstracciones de "lenguaje" y "gramática").

¿Cómo son las Matemáticas?

9.- Para ver un estudio detallado sobre las matemáticas caseras de unos vendedores de chucherías en Papua Nueva Guinea, véase SAXE (1991). Para la descripción de un uso informal de las matemáticas en los supermercados, véase LAVE, MURTAUGH y DE LA ROCHA (1984).

Las matemáticas son, en cierto sentido, como muchas otras cosas, pero no son exactamente lo mismo que otras tantas.

A pesar de las frecuentes analogías, las matemáticas no son un lenguaje como es el que hablamos (aunque al igual que el arte o la música puede ser un medio de comunicación) la mayoría de las matemáticas no son desde luego como una "*lengua natural*" que los niños en cada cultura aprenden de las personas que los rodean, tampoco son una "*lengua extranjera*" como pueden ser el lituano, el japonés o el inglés para hablantes de otras lenguas. Las lenguas naturales son ínter traducibles – cualquier cosa que se diga en alemán o en suahili o incluso en una lengua muerta como el latín o el sánscrito puede traducirse a cualquier otra lengua (con ciertas estratagemas en el caso del vocabulario especializado). Algunos enunciados matemáticos pueden trasladarse a enunciados lingüísticos, aunque a menudo haciendo uso de muchos circunloquios y con la consiguiente pérdida de precisión, pero es imposible hacerlo al contrario. Intentemos componer un poema o una reseña cinematográfica en forma matemática.

Las matemáticas tienen solamente una gramática y un vocabulario esqueléticos. Son en primer lugar un gran número de hechos relacionales (que pueden en un momento haberse calculado sistemáticamente pero que ahora deben ser aceptados al pie de la letra). El conocimiento de las matemáticas es más como el conocimiento de la geografía que como el conocimiento de la lengua – y al igual que el conocimiento de la geografía depende en gran parte de los viajes concretos que cada individuo haya realizado. El "*habla matemática*" es usada y entendida sobre todo por los matemáticos. Los expertos en matemáticas normalmente enseñan a estudiantes universitarios, que ya tienen una buena idea del habla matemática, al igual que los usuarios de ordenadores comprenden la "*ciberhabla*". Cuanto más abstrusas se vuelven las matemáticas, menos matemáticos son capaces de hablar profesionalmente de ellas, incluso entre sus mismos colegas.

Las matemáticas tampoco son como la música, aunque se pueden encontrar armonías musicales en las matemáticas y se puede decir que ambas se fundamentan en "*patrones*". Las matemáticas no se construyen a partir de notas, acordes, armonías, ritmos y tiempos como ocurre con la música. Una sinfonía no puede experimentarse en forma de ecuación o diagrama matemáticos.

Las matemáticas pueden considerarse una historia, excepto que no tiene personajes ni un argumento complejo que se vaya descubriendo constantemente.[10] La analogía es aproximada, pero útil. Al igual que las matemáticas, las historias deben ser internamente consistentes y lógicas, aunque el tema sea caótico.

Las historias son la forma en que damos sentido a la experiencia. Imponemos las historias en el mundo y construimos mundos con nuestras historias. Cualquier cosa de la que no podamos hacer una historia no la podremos comprender. Los hechos y las relaciones en las historias no siempre reflejan hechos y relaciones del mundo físico. Pero dentro de la historia debe haber consistencia y por lo tanto existe la posibilidad de que sea verdad. En las historias existen los personajes, y lo que les ocurre en la historia es real (con respecto a la historia). ¿Existe Hamlet? En la historia sí. ¿Existen los fantasmas? En las películas, sí. Cuando Polonio es atravesado por una espada, se adecua a los imperativos del mundo dramático en el que existe – sangra y muere.

¿Existen los números? En el mundo o en la historia de las matemáticas, sí. Siempre que se les usa o se piensa en ellos. Se comportan de acuerdo con los imperativos del mundo de las matemáticas. ¿Y qué decir de la infinidad de los números que nunca se han usado o que ni siquiera se ha pensado en ellos? También existen – potencialmente. Ocurre como con cualquier otra construcción humana.

¿Existen los edificios? Por supuesto, ¿dónde? En el mundo físico ¿Dónde existe el conocimiento sobre los edificios? Hasta cierto punto en la mente de las personas, pero sobre todo en los libros y en las estructuras de los edificios que ya existen. ¿Existen los edificios antes de que se construyan?

10.- Field (1989) describe el punto de vista "*imaginario*" de que las matemáticas son una buena historia. Al igual que muchas historias, puede ser la verdad en determinadas circunstancias. El mismo autor (Field, 1980) afirma que podría ser posible hacer ciencia con historias pero sin números, aunque reconoce que las matemáticas son válidas como instrumento en determinados casos en los que las historias no lo son.

Potencialmente – un número infinito de ellos. ¿Dónde? En ningún lugar; no todavía. Las cosas con existencia potencial no tienen existencia actual y no residen en ningún lugar.

Después de tantas cosas negativas, ¿se puede decir algo positivo sobre la naturaleza de las matemáticas? En un sentido muy general, las matemáticas (como la lengua, la música, la arquitectura, el arte, el deporte y el amor romántico) son atribuibles solamente a la forma creativa en que los humanos somos capaces de pensar. No podríamos tener matemáticas si no fuésemos capaces de pensar en términos matemáticos. Las matemáticas, como una empresa, son producto de la imaginación y la creatividad humanas, que implican curiosidad, invención, descubrimiento, razonamiento, aprendizaje, comprensión, interés y esfuerzo.[11]

Las matemáticas son además un fenómeno social, que implica no solamente la forma en que otras personas nos perciben y tratan con nosotros, sino también la forma en que nosotros nos percibimos en relación con los demás. Finalmente, son una actividad interactiva. La gente desarrolla las matemáticas de muchas formas ejercitando sus cerebros con matemáticas que ya existen. Todas las matemáticas, incluso las más primitivas, dependen de las matemáticas que se habían hecho anteriormente. Nuestro nivel matemático depende hasta cierto punto de nuestras historias personales. Y al igual que cualquier otra cosa que nos suceda, las matemáticas además implican suerte, o casualidad, en la forma en que nuestras vidas se desenvuelvan.

A veces las matemáticas pueden ser congruentes con el mundo físico, pero solamente hasta el punto en que seleccionamos y organizamos aspectos de ese mundo para que se correspondan con nuestras matemáticas. Es una coincidencia más que una reflexión. Las matemáticas pueden adecuarse de una manera satisfactoria en cálculos simples y en situaciones muy concretas. Pero los fenómenos complejos, como la física, la economía y la psicología necesitan mucho modelado y ajuste de curvas para que las matemáticas puedan apenas aplicarse. Las personas que preguntan si el mundo es matemático deberían explicar de qué aspectos están exactamente hablando.

Incluso así, la coincidencia entre matemáticas y realidad física es a veces notable. Las dimensiones y los pesos de los objetos físicos respetan nuestras leyes matemáticas, incluso si los sumergimos en agua o los arrojamos al aire. El amanecer y el atardecer se ajustan a las restricciones matemáticas que les hemos asignado. Hace unos 100 años, los matemáticos calcularon correctamente la existencia de planetas hasta entonces desconocidos e insospechados. El universo parece seguir nuestras leyes matemáticas – un hecho capitalizado por los estudiosos del cosmos que usan las matemáticas – y nada más – para probar sus teorías de cómo empezó el universo.

A la larga, el mundo físico y el mundo de las matemáticas tienen que estar de acuerdo uno con otro porque no es posible que nosotros vivamos en dos tipos diferentes de realidad. No sería sorprendente que todos los constructos mentales que colocamos en el mundo, como la evidencia de nuestros distintos sentidos, encajen en un todo consistente y coherente, sobre el que todos estemos de acuerdo. Si no fuera este el caso, el mundo no sería como es y nosotros no seríamos quienes somos.

Inevitable e invariable

Las matemáticas representan sus propias relaciones lógicas y computacionales, no incluyen nada del mundo físico (incluyendo el cerebro humano). El mundo de las matemáticas podría existir si la raza humana se extinguiera; incluso si no existiera el mundo físico como lo conocemos. Las estructuras de las matemáticas no necesitan un cerebro humano o un mundo físico que las sostenga. Por definición, dos y dos son cuatro en cualquier universo. Por definición el cuadrado y el círculo tendrían las mismas propiedades geométricas en cualquier universo en el que pudieran existir o ser imaginados. Todas las matemáticas necesitan para persistir algún lugar donde manifestarse. Y durante siglos el

11.- Para una visión interesante e idiosincrásica de cómo las matemáticas pueden haber evolucionado del tipo de pensamiento que hace posible el lenguaje, ver DEVLIN (2000).

lugar ha sido el más endeble punto de apoyo: el papel.

Desde que nuestros antepasados dejaron de escribir en una piedra hasta el momento en que los textos y los datos se comenzaron a almacenar electrónicamente, había un lugar predominante donde las matemáticas existían, y ese era el papel. Siempre ha habido algunas matemáticas – relativamente pocas – en la mente humana, pero la parte más duradera estaba y continúa estando en el papel. Esa es la razón por la que han existido más matemáticas que con las que cualquier individuo o grupo de individuos haya podido familiarizarse; nadie podría leerlas todas, no digamos entenderlas todas. Esta es la razón por la que las matemáticas podrían sobrevivir incluso si los seres humanos desaparecieran – porque persistirían en el papel, o en campos electromagnéticos, hasta que cualquier otro tipo de inteligencia viniese a interpretarlas y desarrollarlas. Es también la razón por la que las matemáticas podrían, en principio, sobrevivir al fin del mundo – viajando eternamente en naves o como paquetes de ondas radiofónicas (como cualquiera de las comunicaciones que se envían rutinariamente para pruebas espaciales).

Nuestras creaciones se convierten en el medio donde vivimos. Tenemos la ilusión de que nos encargamos de nuestras creaciones porque constantemente las retocamos y las "*usamos*", pero nos cambian tanto como nosotros las cambiamos. Nosotros ya no inventamos los mundos en los que vivimos, ni hacemos de ellos deliberadamente lo que son. Tenemos que explorar estos mundos si queremos ver en qué se han convertido, y a veces para ver en qué nos hemos convertido nosotros.[12]

El origen de las matemáticas

Se especula mucho sobre "*cómo empezaron las matemáticas*". Una historia popular habla de un pastor que ponía piedrecillas en su bolsillo para asegurase de que por la noche volvían las mismas ovejas que habían partido por la mañana. Pero esta visión superficial no da cuenta de la realidad de las matemáticas, ni de la relación entre piedrecillas y ovejas, sino de la relación entre piedrecillas y números o entre números y ovejas, y de la importantísima relación entre los números – la auténtica idea de número. Edificar las matemáticas supone contar con cimientos más sustanciales que la preocupación de si se da cuenta de todas las ovejas. Requiere de mentes imaginativas.

La comprensión de que hay más o menos o el mismo número de piedrecillas en una ocasión en comparación con otra ocasión depende de una comprensión matemática ya existente. En cualquier caso, ¿cómo podría el genio de un pastor apócrifo diseminarse por todo el globo? No fue un individuo quién dio a luz a las matemáticas; fue la raza humana.[13]

Dos elementos deben haber tomado parte en la mezcla de la que surgieron las matemáticas. Uno es el desarrollo general del cerebro humano, cuando alcanzó un grado de complejidad y de poder imaginativo – cuando el homo se convirtió en sapiens – casi con seguridad se relacionó con la conciencia y la autorreflexión. De esto trataremos más en el capítulo siguiente. Y el otro es un medio social y cultural fértil.

Lo que hizo a las matemáticas despegar tan espectacularmente, de un sistema de contar pequeño y rudimentario hasta llegar a la enormemente compleja y nunca completada masa de conocimiento fueron las matemáticas en sí mismas. El momento en el que las matemáticas dejaron de ser sim-

12.- El conocimiento matemático es parte del mundo de las ideas y del conocimiento que el filósofo Karl Popper (1972) caracterizó como el "mundo tres" en contraste con el mundo físico externo en el que habitamos y el mundo interior de los sentimientos y de las creencias personales. El conocimiento en el mundo tres existe no solamente en los libros, sino en los objetos en general. Un automóvil revela muchos aspectos sobre lo que conocemos de los automóviles, sobre los metales y la electrónica, y sobre las matemáticas. El mundo tres está creado por las personas – no todo a la vez, o en el mismo lugar, sino un poco cada vez, de la misma forma que se ha creado el mundo de la música – y existe independientemente de las personas.

13.- Mi conjetura preferida es que las matemáticas en general provienen mas de las estrellas que de las ovejas. Para los antiguos, las estrellas podrían haber sido la parte más prominente, familiar, aunque inexplicable del paisaje, una constante fuente de asombro y entretenimiento nocturno. Siempre cambiando de posición, pero siempre volviendo donde estaban en un principio, las estrellas estaban fuera del alcance de los seres humanos aunque en contacto íntimo con las cuestiones humanas – con las mareas, el tiempo, las estaciones del nacimiento, de la muerte y del crecimiento (por no contar que eran el hogar de los dioses). La cabalgata cósmica habría sido un terreno fértil para explorar los números y sus propiedades, los patrones que siguen las relaciones espaciales y la recurrencia de acontecimientos. Pero esta es una predilección personal por una historia, una fábula, sobre otra.

plemente algo que la gente tenía en sus cabezas, de forma intuitiva e informal, y se convirtieron en un sistema que se representaba de forma escrita, se convirtieron en una propiedad pública, que se podía examinar, ampliar y sobre la que reflexionar. No fue en el cerebro humano donde se desarrollaron las matemáticas, sino en la interacción entre el cerebro y las mismas matemáticas.

Las matemáticas en su forma escrita probablemente precedieron y pueden muy bien haber engendrado el lenguaje escrito. Y tanto las matemáticas escritas como el lenguaje escrito derivaban de las pinturas, o de la representación gráfica de hechos (o más bien de ideas de hechos), sobre arena, piedras y posteriormente papel. Volviendo a este pasado, las matemáticas podrían haber tenido las mismas raíces que el lenguaje, el arte, los mapas, los diagramas y otras formas de expresión.

Mientras que los conceptos básicos de números, medidas y cálculo fundamental eran universales, porque derivaban directamente del pensamiento y del lenguaje humanos, las tecnologías de las matemáticas – como los sistemas y las convenciones notacionales para representar números – variaban exponencialmente. Ya no había formas de pensar, sino medios de hacer.

Descubrimiento o invención

¿Las matemáticas se descubren o se inventan? Esta última pregunta, una vez más, no es fácil de contestar, no por ningún misterio de las matemáticas, sino por la imprecisión del lenguaje. En un determinado momento la diferencia entre los dos términos pudiera haber sido obvia – algo es inventado si antes no existía, y algo es descubierto si anteriormente existía pero era desconocido. Los dispositivos y los productos manufacturados se inventan y las propiedades y las posibilidades de los fenómenos naturales como el aire, el aceite, el cristal o la goma son descubiertos. Pero una vez que alguien ha inventado y ha creado un artefacto, éste adquiere el estatus de fenómeno natural – otras personas pueden descubrirlo o reinventarlo. Y el descubrimiento puede auto iniciarse o dirigirse, de forma que se convierta en un tipo de invento.

Se podría decir que ese lenguaje es algo que cada niño descubre (o que le enseñan). Aún así los estudios del modo tan eficaz que las destrezas y el conocimiento del lenguaje se desarrollan en los niños han llevado a muchos investigadores a afirmar que el lenguaje es inventado (o reinventado) por los niños más que descubierto por ellos o a ellos revelado. Y nada menos que un psicólogo de la talla de Jean Piaget ha afirmado que los niños tienen que inventar o reinventar las matemáticas para aprenderlas.[14] En cierto sentido, la rueda es reinventada cada vez que alguien descubre lo que una rueda puede hacer.

Otros aspectos de las matemáticas (y del lenguaje), tanto histórica como individualmente, son el resultado no tanto de un descubrimiento o una invención como del ejercicio de la razón imaginativa. Esto a veces se le conoce como conceptualización, o comprensión, pero también se le podría conocer como "*buenas ideas*". Es la repentina toma de conciencia de cómo se unen las cosas, cómo se estructuran internamente o cómo se relacionan externamente. Es "*ver*" cómo las cosas encajan, por ejemplo en un puzzle o en un problema de ajedrez, en la construcción de un mueble o de un programa informático.

El conocimiento está siendo constantemente creado – algunas veces en la duplicación de lo que alguien ya conoce, a veces en el redescubrimiento de lo que una vez fue conocido pero posteriormente perdido, y a veces en una invención genuinamente original. El alcance y la envergadura de las matemáticas es enorme. No importa si es todo, actual y potencial, inventado o descubierto, consensual e idiosincrásico, el producto de una sola cosa – el cerebro humano interactuando con el mundo que le rodea; en este caso, es el mundo de las matemáticas. La ruta que seguiremos para tratar de comprender las matemáticas comienza con la reflexión sobre la naturaleza del cerebro.

14.- Más información sobre la reinvención de las matemáticas por parte de los niños en el capítulo 13.

CAPÍTULO 2

Dar sentido

Antes de sondear qué hacen las personas para darles sentido a las matemáticas, deberíamos considerar cómo damos sentido a cualquier cosa. ¿Qué consideramos que hace que las matemáticas sean posibles (y el lenguaje y cualquier otra cosa)? ¿Qué consideramos que erige barreras a nuestro desarrollo intelectual?

Las personas son imaginativas, curiosas, inventivas. Aprendemos muchas cosas sin esfuerzo (en algunas ocasiones sería mejor no conocerlas); pero hay otras cosas que nos resulta difícil aprender y recordar, no importa el empeño que le pongamos. Odiamos las restricciones y las limitaciones, no nos gusta la incompetencia (incluida la propia), y detestamos el aburrimiento. Somos emocionales y tenemos sentimientos. Podemos aprender, a veces casi sin necesidad, que existen cosas que no podemos aprender y podemos aprender, también casi sin necesidad, que somos incompetentes en varios sentidos. Podemos aprender la forma errónea de aprender algo. Todo esto es relevante para las matemáticas.

Sé que algunos lectores harán objeciones al párrafo anterior, en nombre de otros y posiblemente de ellos mismos. Dirán que hay personas que tienen un umbral emocional bajo, sea para la alegría o para la tristeza, que muchas gente no puede aprender, que carece de imaginación, que se deleita con la incompetencia y que incluso tolera el aburrimiento. Puede que sea así – aunque siempre hasta un determinado punto y normalmente a consecuencia de la experiencia. No trato de plantear un debate aquí.[15] Por el contrario, quiero describir sistemáticamente algunos de los aspectos principales del pensamiento y de las predisposiciones humanas, especialmente visibles durante la infancia, que son las más relevantes para la comprensión de cómo las matemáticas podrían desarrollarse completamente.

Cuatro características únicas del cerebro humano

Cuatro características únicas y universales del cerebro humano hacen posible (e incluso, se podría argumentar, inevitables) las matemáticas y otros logros humanos:

1. Aquello que los seres humanos buscan en el mundo en que se encuentran
2. Aquello que esperan de ese mundo

15.- Sobre un debate más extenso sobre este punto, ver To think (SMITH, 1990) y The Book of Learning and Forgetting (SMITH, 1998). Argumentos como "*Yo no tengo ese cerebro*" no los considero válidos. Todos tenemos el mismo tipo de cerebro, aunque nuestro talento, intereses y experiencia inevitablemente difieren. Todos tenemos potencial – aunque no un potencial igual – para la música, las matemáticas y para cualquier otra cosa. La música, las matemáticas y cualquier otra cosa que los humanos hayan creado están dentro de nuestra competencia, en grados distintos. Pero no están en nuestros genes.

3. Aquello que aportan a ese mundo

4. Cómo responden a ese mundo

La presencia de estas características no necesita explicación o justificación; es como son las personas. Sin estas características viviríamos en un tipo diferente de mundo – o mejor dicho, el mundo y las personas como nosotros los conocemos no existirían.

El mundo al que me refiero ahora es el mundo físico, pero las cuatro características se aplican igualmente al mundo de las matemáticas y a cualquier otro mundo que podamos experimentar.

1. Las personas buscan organización y estructura en su experiencia, buscan relaciones e interconexiones. Buscan sentido en el mundo, y con ello quiero decir que no esperan que las cosas sean arbitrarias o producto del azar. Además buscan utilidad y relevancia para sí mismos, buscan modos de conseguir fines. En resumen, buscan las formas en las que el mundo sea predecible y formas en las que las personas sean parte del mundo.[16]

2. La gente espera encontrar tres cosas en el mundo, a las que se pueden nombrar como las "*tres C*". Esperan encontrar consistencia, coherencia y consenso. Por consistencia, quiero decir que todos esperamos que el mundo sea mañana igual que es hoy y que era ayer. No estoy diciendo que no habrá cambios o acontecimientos inesperados, sino que estos cambios ocurrirán de una forma consistente. El mundo no es caprichoso. Se comporta de forma predecible, incluso si no sabemos lo suficiente sobre acontecimientos concretos para predecir lo que ocurrirá.[17] Por coherencia, quiero decir que esperamos encontrar todo en conjunto. No esperamos fragmentos de mundo, o de nuestra experiencia, que no se relacionen con los demás fragmentos. Y finalmente, por consenso, quiero decir que esperamos que otras personas vean el mundo y sus experiencias de la misma forma que nosotros. No quiero decir que esperamos que todos tengan las mismas opiniones o creencias porque obviamente no es así. Pero sí creemos y esperamos que el mundo en el que vivimos sea igual para todos – que la lluvia que caiga sobre mí, caiga igualmente sobre la persona que está a mi lado y que el sol que vemos ponerse cada tarde también se esté poniendo para mi vecino.

3. Las personas aportan al mundo la capacidad y la propensión constante a categorizar todos los objetos y acontecimientos de su experiencia y a buscar (o establecer) múltiples relaciones entre esos objetos y acontecimientos.[18] A partir de estas categorías y relaciones, las personas forman generalizaciones y abstracciones que les permiten sacar partido de su experiencia y ampliar su comprensión del mundo. Además yo diría que las personas aportan el lenguaje al mundo, aunque el lenguaje, al igual que las matemáticas, es un producto de todos los factores que estoy considerando. El lenguaje que usamos resume y determina la forma en que vemos el mundo. Y finalmente, las personas aportan un sentido de la historia al mundo, que puede llamarse el sentido de cómo las cosas deberían encajar a lo largo del tiempo. Damos sentido a nuestra experiencia con historias. Nos comunicamos con los demás con historias. Y buscamos historias, no solamente con el lenguaje, sino con las acciones, las imágenes, los sonidos y los números.

4. Las personas son sensibles al mundo; nunca están aisladas de él. Todo lo que hacemos afecta al mundo que nos rodea, y todo lo que tiene lugar en el mundo nos afecta a nosotros. En efecto, los

16.-Bruner (1997) propone que los tres modos "*primitivos*" de pensamiento nos permiten darle sentido al mundo: ínter subjetividad (leer la mente de otras personas; entender cómo hablan, actúan y perciben el mundo); accional (construir narraciones para describir y explicar acciones, agentes y propósitos); y normativo (establecer estándares, convenciones, obligaciones y otras expectativas). Dar sentido, o "*dar significado*" como dice Bruner, es una cuestión de interpretación, normalmente apropiada para situaciones particulares y "*altamente tolerables con respecto a la verificabilidad, las condiciones de la verdad o la justificación lógica*". Además propone un cuarto modo de dar significado, el proposicional, en el que las reglas y símbolos se usan para conseguir significados "*descontextualizados*" (o significados que se pueden abstraer de situaciones particulares y generalizarse).

17.-La consistencia también incluye la continuidad, la idea de que la experiencia nunca se desarticulará y de que a todo le seguirá algo más en su lugar apropiado. La continuidad es un concepto matemático muy importante.

18.- La palabra "*categorizar*" exige algunas modificaciones. Existe la tendencia de pensar que las categorías son como las cajas de zapatos o las carpetas de archivos, alineados ordenadamente sin espacio entre ellos y sin que exista duda alguna de dónde debe colocarse cada objeto. Pero a veces es difícil decidir a qué categoría pertenece un objeto o acontecimiento. ¿El amanecer se debe colocar en la categoría de la noche o del día o en una categoría propia – lo que tampoco te ayudará a decidir cuándo termina la noche y comienza el día? Y todavía quedan más pensamientos "*difusos*" (ver nota 6). Sería mejor pensar en las categorías como si fueran ganchos en los que colocar las cosas que comparten cierta similitud, dejando espacio para ganchos más pequeños en el medio. Al lenguaje se le debe considerar (normalmente) como el que proporciona los ganchos para categorizar esquemas, mientras que las matemáticas (normalmente) proporcionarán compartimentos más claramente definidos. Para saber más sobre el tema de la categorización humana, véase Rosca y Lloyd (1978) y Huttenlocheer, Jordan y Levine (1994).

individuos (o sus cerebros) y el mundo que los rodea (incluyendo las demás personas) constituyen un sistema integrado. Ningún hombre es una isla. Esta interacción de cerebro y medio no es simplemente una obviedad vacía. Nuestra relación íntima e ineludible con el mundo más amplio en el que vivimos es la base de todo nuestro pensamiento, nuestra acción y nuestro aprendizaje. [19]

¿Qué es un "mundo"?

Uso el término "*mundo*" en su sentido más amplio para referirme a cualquier cosa fuera del individuo que sea capaz de influir y afectar al comportamiento y al pensamiento del individuo. Podemos empezar con el "*mundo natural*", el medio que existió antes de que la mano del hombre actuara sobre él. Me refiero aquí al mundo de la tierra, el mar y el cielo; la noche y el día; el tiempo, las rocas y los árboles; y las criaturas vivientes de todos los tipos. Muchas de ellas son accesibles a través de los sentidos – la visión, los sonidos, las texturas y los sabores de lo que somos conscientes.

Pero también estoy incluyendo la multiplicidad de cosas que los seres humanos han colocado en el medio, por lo que gran parte del mundo "*natural*" original normalmente está oculto a nosotros. Llamo a este medio mejorado el "*mundo físico*". Incluye toda la tecnología, desde las carreteras a la construcción de barcos, aviones y ordenadores. Además incluyo todos los mapas y diagramas, símbolos y sistemas notacionales que nos permiten navegar por el mundo, tanto natural como fabricado. No distingo la parte fabricada de nuestro medio del mundo natural – en realidad, estoy seguro de que los niños y todas las demás criaturas vivientes consideran los artefactos humanos simplemente como partes del mundo en general. Tenemos que aprender a distinguir lo que es "*natural*" de lo que la humanidad ha facilitado.

Este "*mundo*" ampliado de objetos y personas es más que un simple hecho físico al que nos tenemos que acomodar. Para empezar, el mundo es una fuente de memoria enorme. Hay bastante más conocimiento en el mundo que en ninguna cabeza, tal vez más de lo que haya en todas las cabezas, y no me estoy refiriendo solamente a libros.

Los diales, las palancas y los conmutadores de un coche nos recuerdan cómo conducir un coche. (Supondrían una evidencia para un extraterrestre de nosotros y de nuestra vida). Los mapas y las señales de tráfico nos recuerdan la ruta que debemos seguir y la carretera nos guía hacia donde tenemos que colocar nuestros vehículos y el camino que tenemos que seguir. El teclado de un ordenador nos recuerda cómo deberíamos mover los dedos para conseguir determinados efectos, la manivela de una puerta nos recuerda cómo abrirla, la cubertería y la vajilla nos recuerdan cómo se consumen los alimentos. El hecho de que normalmente demos por sentadas las miles de cosas que rutinariamente encontramos en el mundo no significa que no desempeñen una parte en nuestro comportamiento. En gran medida controlan nuestro comportamiento.

Y soportan el peso de nuestra mente. Todo lo que nuestro medio nos recuerda es algo que nuestro cerebro no tiene necesidad de almacenar en detalle. Nuestras intenciones, como nuestros sentimientos, puede que tengan sus orígenes en nuestra cabeza, pero el modo en que llevamos a cabo gran parte de nuestras actividades es sustentado si no controlado por las situaciones y las estructuras que se encuentran fuera de nosotros.

Diferencio las matemáticas como un mundo aparte porque no puedo tener acceso a ellas a través de los sentidos (excepto en un modo superficial), o a través del lenguaje. En las matemáticas se entra, se explora y se las usa solamente a través de la razón. Al igual que el mundo físico, contienen sus propias estructuras, pero las estructuras en este caso son estrictamente matemáticas. Al igual que la música, es un mundo único e independiente.

19.- Analizo cómo se amplían las mentes humanas gracias a la interacción con el papel – cómo lo que está en la mente y lo que está en el papel cambian continuamente y se elaboran uno al otro – en un examen de la composición en Writing and the Writer (Smith, 1994). Véase además The world on Paper de David Olson (1994).

A veces pensamos que esas estructuras externas deben estar en nuestra cabeza porque, por ejemplo, podemos imaginar cómo conducir un vehículo sin subirnos realmente a uno. Pero lo que hemos hecho ha sido interiorizar el coche. En primer lugar interactuamos con un coche "*real*" en el mundo que está fuera de nuestra cabeza, a continuación ponemos en efecto el coche en nuestra cabeza y lo conducimos con nuestra imaginación.

La misma reciprocidad ocurre con las matemáticas. Empleamos lápices y papel para hacer cálculos que en nuestra cabeza no pueden ser posibles. Pero con la experiencia, podemos imaginarnos haciendo esos cálculos. Ponemos el lápiz y el papel en nuestra mente. Hacemos lo mismo con el lenguaje, constantemente, cuando practicamos algo que queremos decirle a alguien, o simplemente nos "*hablamos a nosotros mismos*". No podemos nunca escapar del mundo exterior, ni siquiera en nuestras fantasías.

Lo que el cerebro (o las personas) hacen

La capacidad intelectual del homo sapiens nunca debería subestimarse. Incluso en los momentos de mayor ineptitud, somos muy complejos y competentes. Constantemente creamos y exploramos nuevos mundos, lógicos, funcionales, reales e imaginarios. Hacemos esto – en un principio – solamente con el equipo con el que nacimos. Pero casi inmediatamente reclutamos a otras personas y hacemos uso de lo que encontramos a nuestro alrededor para aumentar nuestro conocimiento y desarrollar nuestros poderes.

He mencionado nuestra constante propensión a dividir las cosas en categorías, a establecer relaciones entre esas categorías y a dar nombres a esas categorías y relaciones. Esto nos proporciona un inmenso manejo intelectual del mundo. Sin categorías, no seríamos capaces de diferenciar nada. El mundo sería o un agujero enorme o un desorden infinito de ingredientes inconexos. Sin relaciones entre las categorías nada se relacionaría con nada y nuestra mente estaría llena de escombros sin significado alguno. Y sin nombres, no habría modo de pensar sobre nada, no digamos de hablar sobre ello.

Hemos nacido con un conjunto de formas predispuestas para organizar experiencias, al que las matemáticas se adecuan fácilmente. Poseemos un sentido innato del tiempo, por lo que esperamos que una cosa ocurra después de la otra. Nuestro sentido de la estructura es como una vara de medir que colocamos sobre los acontecimientos, o un hilo al que se ciñen nuestras experiencias. No vemos la vida como un revoltijo de sucesos sin relación. Por el contrario, tenemos una profunda sensación de la secuencia, de la causa y el efecto, de las intenciones y los resultados y de las cosas que tienen un lugar apropiado en el tejido temporal de nuestras vidas.

Tenemos un sentido innato similar de la extensión espacial del mundo y del hecho de que podemos movernos en este mundo espacial. Podemos observar todo en el mundo – incluidos a nosotros mismos – desde diferentes puntos de vista. Puesto que podemos ver cómo las personas y los objetos se relacionan unos con otros, y con nosotros mismos, en el tiempo y en el espacio, podemos triangular (término matemático adoptado por los teóricos para describir cómo localizan las personas los objetos o incluso las ideas en el mundo). Podemos ver el mismo mundo con o sin nuestra presencia (la visión de un dios o del narrador omnisciente e impersonal de una saga). Y todas estas cosas que podemos literalmente hacer podemos hacerlas metafóricamente, a través del lenguaje y la imaginación. Podemos pensar.

Hemos nacido con las ideas básicas de la aritmética – con las nociones de uno, alguno, más, menos, lo mismo y "*no es lo mismo*". Somos sensibles al tamaño, al volumen, al peso, al movimiento y a la velocidad relativa. Hemos nacido con las nociones básicas de geometría – del espacio, la forma, la posición, la dirección, la distancia, el área, los límites y las líneas rectas. Y hemos nacidos con las nociones básicas de álgebra – de que una cosa representa otra, y de que lo que se aplica en una ocasión se puede aplicar en circunstancias similares en otras ocasiones – los grandes poderes humanos de la abstracción y la generalización.

Perseguimos ideas más allá de su relevancia o utilidad inmediatas, y por lo tanto nos aventuramos en muchas áreas de la teoría, incluyendo la ciencia "*pura*", las matemáticas "*puras*" y el arte. Los números entran con facilidad en nuestras imágenes de tiempo y espacio, aunque no pensemos eso de los números cuando nos enfrentamos a ellos en su terreno, el mundo de las matemáticas, fuera del nuestro.

Hemos nacido con la capacidad de reconocer patrones, como cuando distinguimos caras, lugares y palabras escritas y habladas. Reconocemos secuencias y similitudes, como hacemos con la música. Somos capaces de completar patrones cuando vemos solamente parte de ellos, cuando ojeamos a malas penas un rostro, oímos un fragmento de una melodía o detectamos el aroma del café. Y somos capaces de imponer modelos sobre configuraciones que de otra manera podrían parecer que se habían formado al azar, como las figuras que encontramos en las constelaciones de estrellas o las imágenes que vemos entre los puntos de luz parpadeantes en las pantallas de televisión o en los monitores de los ordenadores. Podemos realizar patrones, multitud de ellos, entre los números y otras estructuras matemáticas.

Puesto que somos tan aficionados a hacer patrones, sería razonable preguntarse qué es un patrón. Un patrón es cualquier cosa en la que podemos encontrar una secuencia predecible. Los patrones no existen en ningún mundo; existen en nuestra cabeza. Sabemos cuando identificar o completar un patrón porque tenemos una sensación de satisfacción, una sensación de finalización. Hemos encontrado lo que buscábamos.

Esta agradable sensación de término es parte de lo que yo considero una característica esencialmente humana – una sensación de adecuación o sensación de idoneidad. De esta sensación apenas se habla, pero es crucial para darle sentido a cualquier cosa. Nos dice cuando debemos parar de ensayar, cuando hemos encontrado una solución. Un ejemplo es cuando encontramos la pieza justa para un hueco en un puzzle, cuando decimos, "*ah*" y podemos continuar. De otra forma continuamos intentándolo o abandonamos. La sensación de adecuación nos lleva a las convenciones, que hacen posible gran parte de la vida mental y toda la vida social. Tenemos convenciones para todo – incluyendo las formas apropiadas de ser poco convencional.

Es porque la vida con frecuencia nos obliga a adecuarnos a nuestras expectativas por lo que somos capaces de sacar provecho de nuestra tendencia innata a abstraer y generalizar. No consideramos el mundo como algo caótico. Más bien, esperamos que todo se someterá a nuestra razón y se adecuará a la forma en que esperamos que todas las cosas se organicen juntas. Nuestra sensibilidad para el orden y nuestra preferencia por la previsibilidad no necesariamente trabajan en nuestro favor, y a menudo mostramos una tolerancia limitada ante la incertidumbre y la ambigüedad.

Añadamos unos cuántos ingredientes más y ya casi tendremos un ser humano: lenguaje, reflexión, imaginación, curiosidad, inventiva, imitación y disponibilidad para explorar y explotar el mundo natural, hasta que aprendamos las cautelas y las restricciones. ¿Qué falta? Las emociones, la gama que va de la esperanza al miedo, del amor al odio, de la alegría a la desesperación. Los sentimientos más íntimos sobre nosotros mismos y sobre el mundo son la fuerza que está detrás de nuestro aprendizaje, nuestra comprensión y nuestra creatividad.

Ninguna imagen de la persona estaría completa sin el matiz de las características improductivas. Nos confundimos y nos desilusionamos, construimos imágenes negativas de nosotros mismos, nos convertimos en antagonistas de otros (incluso cuando estén tratando de ayudarnos) y damos y recibimos mensajes erróneos. Somos humanos y falibles. Todo esto debe haber formado parte del desarrollo de las matemáticas, y con toda seguridad desempeña una parte importante cuando nos convertimos en matemáticos.

Llegar al límite

Para resumir este capítulo: los seres humanos tenemos un cerebro creativo que usamos para darle sentido a nuestra experiencia. Con nuestro conocimiento y con las tecnologías construimos mundos que influyen recíprocamente en los seres humanos, como indicadores, memoria y guía. Una mente inteligente y un medio fértil juntos constituyen una fuerza creativa potente que con toda seguridad favorecerá el desarrollo de los sistemas complejos.

De aquí que toda nuestra tecnología sea inevitable. Es seguro que los humanos, antes o después, desarrollan formas de extender su poder mental, al igual que es seguro que, antes o después, magnifican su fuerza, amplían sus capacidades preceptuales e incrementan la velocidad a la que viajaron por la tierra, exploraron y explotaron los mares, los cielos e incluso el espacio exterior. Cada uno de los pasos que los humanos dieron para aumentar su poder se convirtió en un peldaño de una escalera que podían subir para aumentar sus capacidades y sus ambiciones. Pero nunca se da marcha atrás (a menos que fuerzas hostiles intenten destruir nuestro conocimiento o nuestra tecnología). La humanidad (al completo), esclava de sus logros tecnológicos e intelectuales, siempre avanza hacia el límite.

Al igual que la mayoría de la tecnología humana (y las instituciones) las matemáticas son un sistema de *feedforward* (preacción). Cuánto más se tiene, más se obtiene. Los sistemas de reacción (*feedback*) tienden a secundar estados estables y control constante. La reacción de un termostato en un sistema térmico mantiene la temperatura estable. Si la temperatura desciende, el horno se enciende; si la temperatura aumenta, el horno se apaga. Pero con el sistema de *feedforward* (preacción), cualquier cambio del estado estable se magnifica. Cualquier cosa que se genere se amplía hasta que rebasa la escala o se agota a sí misma.

Las matemáticas no llegaron a un punto muerto cuando se desarrollaron los ordenadores. Por el contrario, los ordenadores han permitido que las matemáticas avanzaran hasta el punto de que a veces quedan fuera del alcance de la inteligencia humana. Donde las matemáticas nos llevarán es literalmente incalculable.

CAPÍTULO 3

Las matemáticas en el Lenguaje

Las matemáticas nunca han sido del todo independientes del lenguaje natural. Sus comienzos han debido de ser en general conceptos de los que ya se disponía en el lenguaje hablado, como uno, siguiente, más. Y muchas de las ideas matemáticas continúan tomando expresiones del lenguaje diario, como por ejemplo, el orden numérico y las ideas de beneficios y pérdidas. Pero la comprensión que permite que estas palabras del lenguaje hablado tengan significado en el sentido matemático tiene que provenir de las matemáticas.

Las matemáticas deben tener sus raíces en el lenguaje hablado, pero no existe evidencia de cómo ocurrió, solamente son conjeturas. Existen muchos vestigios de la lucha por poner las matemáticas en forma escrita, de la que finalmente se desarrollaría profusamente; es una historia de un continuo ensayo-y-error.

Podríamos suponer que todos los intentos por colocar tanto el lenguaje como las matemáticas en forma visual tuvieron un origen común en las representaciones de los objetos y los acontecimientos, llamado – con poca precisión - "*arte de la caverna*", en el 40.000 a.C.[20] Los descubrimientos arqueológicos sugieren que las formas escritas del lenguaje y de las matemáticas se desarrollaron aproximadamente a la misma vez, entre el 3000 y el 2000 a.C. , en áreas tan diversas como Egipto, Persia, India y China. Antes de ese tiempo, "*las matemáticas habladas*" deberían de haber sido una parte indistinguible del lenguaje hablado, con un conjunto limitado de números, o más bien de cantidades, y unas cuantas formas rudimentarias de contar, medir y calcular. Pero para el 2200 a.C. ya se sabe de la existencia de las tablas matemáticas, y las matemáticas se usaban para propósitos comerciales, legales y científicos (así como para los impuestos y para prestar dinero con interés).

Nunca fue fácil el desarrollo de las formas escritas tanto del lenguaje natural como de las matemáticas. Las personas se han esforzado durante cientos de años por encontrar la forma más práctica de hacer el lenguaje visible, empezando con la "*escritura pintada*", los signos arbitrarios, el simbolismo fonético (por ejemplo, usar un símbolo pictórico del sol en lugar de las palabras que – con diferentes significados – sonaran igual que "*sol*"), sistemas escritos silábicos y finalmente el principio alfabético que parece estar en el proceso de absorber los sistemas escritos mundiales.[21]

Para las matemáticas, los problemas principales consistían en encontrar los modos de expre-

20.-Existen evidencias de que las personas grabaron números (en forma de muescas sobre fragmentos de huesos y piedra) alrededor del 12.000 a.C.
21.-Existen muchas referencias históricas sobre el desarrollo de la escritura pintada. Olson (1994) y Harris (1995) son especialmente interesantes. Algunas contribuciones en Senner (1989) proponen que el lenguaje escrito podría haber derivado de la escritura matemática (calendarios, datos astronómicos, documentación comercial y oficial), y ambos de la pintura.

sar los números con economía, sin tener que pensar en un único nombre y forma para cada número, y presentar los números de una forma visible que fuera compacta y eficaz en el cálculo. Al igual que con el alfabeto, existe una larga historia de diferentes culturas en lucha por encontrar soluciones propias (tomando prestadas las soluciones de los vecinos). Pero mientras cientos de culturas desarrollaron diferentes formas de lenguaje escrito y hablado, todas se preocuparon por los mismos significados o conceptos. Y la cantidad de soluciones que se urdieron para los problemas de la representación de los números y sus relaciones tenían que ver con las mismas estructuras subyacentes de los números.

En el capítulo anterior, he presentado algunas de las estructuras conceptuales innatas que hacen posibles las matemáticas (y toda nuestra vida racional). Ahora observo algunas de las palabras que reflejan estos conceptos innatos, formando una parte esencial del modo en que pensamos y hablamos. Estas palabras están fuera de los límites de las matemáticas. Todos pensamos y hablamos matemáticamente, mucho antes de aprender matemáticas. Las matemáticas y el lenguaje natural no son formas distintas de pensar; son simplemente diferentes áreas de experiencia a los que el pensamiento humano se puede dirigir. El lenguaje y las matemáticas no exigen facultades mentales únicas y separadas, ni siquiera en los niños.

En el principio, las palabras

Los conceptos matemáticos son visibles entre las primeras palabras que los niños dicen y comprenden, reflejando estructuras matemáticas en el pensamiento subyacente que modela y dirige el desarrollo del lenguaje.

Podríamos comenzar con algunas de las palabras más enérgicas que todo niño comienza a balbucear: la primera, "*quiero uno*", seguido por la inmortal "*quiero más*", de Oliver Twist.

"Uno", "el", "este", "ese" demuestran conceptos de identidad y categorización, como ocurre con "*igual*", "*diferente*" y "*otro*". "*Estos*" y "*esos*" demuestran pluralidad, "*ninguno*" y "*nada*" demuestran el otro extremo.

"*Quiero uno*", "*quiero un poco*", "*quiero otro*", "*quiero más*" "*lo quiero todo*" demuestran de forma similar una comprensión no numérica de la cantidad, mientras que la noción de "*compartir*" – expresada con frecuencia por los niños como "*no es justo*" – revela un atisbo de proporción y porcentaje.

La comprensión de que "*ayer*" es el pasado y "*mañana*" está todavía por venir demuestra un sentido de la secuencia, como ocurre con "*ahora*", "*cuando*", "*entonces*", "*a continuación*" y "*me toca*".

"*Aquí*", "*cerca*", "*lejos*", "*ahora*", "*pronto*" y "*mucho tiempo*" demuestran distancia relativa en el espacio y el tiempo; "*grande*" y "*pequeño*" demuestran tamaño relativo; y "*rápido*" y "*lento*" demuestran velocidad relativa.[22]

Los conceptos geométricos se revelan en las primeras palabras de los niños, como "*derecho*", "*torcido*", "*redondo*", "*afilado*", "*inicio*", "*fin*", así como en "*aquí*", "*allí*", "*arriba*", "*abajo*", "*largo*", "*corto*", "*encima*", "*debajo*", "*gordo*", "*flaco*", "*lado*", "*dentro*" "*fuera*". El concepto matemático y geométrico de cambio está omnipresente en el lenguaje desde sus inicios.

Proposiciones universales del lenguaje matemático

El sistema numérico es fundamentalmente una cosa detrás de otra, "*más*", "*otra vez*" o "*siguiente*", una progresión y una sucesión. Estos son los hilos con los que tejemos todas nuestras per-

22.- Incluso antes de que articulen sus primeras palabras, los niños son muy sensibles a las diferencias y los cambios en los índices relativos del movimiento (BOWER, 1971), un concepto esencial del cálculo.

cepciones del mundo y hablamos de ellas. El orden en el que los acontecimientos familiares ocurren no se puede reorganizar sin interrumpir la línea narrativa de nuestras explicaciones y expectativas, la red que mantiene unidas todas nuestras experiencias.

Todos los lenguajes distinguen entre singular y plural. La distinción numérica se aprecia claramente en la gramática y en el vocabulario, tan fundamental como las distinciones temporales de pasado, presente y futuro, y las distinciones genéricas entre masculino y femenino. Las formas plurales de los nombres, los verbos y otras partes del habla difieren de las formas singulares – el anda, ellos andan. El número (no los numerales) es fundamental para la forma en que vemos el mundo y hablamos de él.

El concepto primario de más se ve aumentado por términos como "*añadir*", "*incrementar*" y "*aumentar*", y contrasta con términos como "*reducir*", "*remover*" y "*disminuir*". Las nociones de replicación y multiplicación contrastan con división y distribución.

Las matemáticas florecen en un campo del lenguaje reducido pero fértil. Cualquiera que pueda hablar posee la competencia mental esencial para dedicarse a las matemáticas. Las estructuras que generan la comprensión del lenguaje y de las matemáticas son las formas básicas en las que trabaja la mente, aspectos de los marcos con significado que el cerebro coloca sobre el caos de la experiencia sin interpretar.

Percepción, lenguaje y matemáticas

Percibimos a las personas y a los objetos como entidades individuales, como unidades, que ponemos en multitud de categorías construidas a través del lenguaje. Además distinguimos a las personas según formas complementarias (u opuestas), como hombre-mujer, alto-bajo, liberal-conservador, social-antisocial, etc. Distinguimos otras criaturas como gatos, perros, vacas y ovejas, y distinguimos objetos como aviones, trenes, árboles y piedras. Esta complejidad inmensa pero organizada es posible solamente porque podemos pensar en términos de individuos, grupos de individuos y equivalencias o diferencias – la pertenencia a conjuntos.

Detrás de muchas de nuestras distinciones categóricas, y tal vez origen de todas ellas, está la inclusión-exclusión. Tanto si se es un niño como si no se es, un canadiense o no, un matemático o no. Es pensamiento binario, la base de la tecnología electrónica digital, tal vez el medio más elemental y poderoso de computación matemática.[23]

Algunas sustancias se funden consigo mismas con tal facilidad que es difícil garantizarles identidades individuales, como las partículas del aire, el agua, la harina o la sal. Y puesto que no las podemos singularizar, tampoco podemos pluralizarlas y así hablar de "*dos aguas*", "*tres harinas*" o "*cuatro sales*". No se pueden contar. Al no poder asignarles las categorías de singular o plural, tenemos que incluir a estas sustancias en una categoría especial de "*nombres de cantidad*", que con frecuencia crea incomodidad en el lenguaje. Cuando los nombres de cantidad se refieren a grupos de personas – como en ocasiones ocurre – como muchedumbre, gobierno y comité, nunca estamos seguros de si tenemos que decir "*es*" o "*son*", no sabemos si tratarlos como singularidades o pluralidades.

Los nombres de cantidad además crean complicaciones en las matemáticas aplicadas. Donde no podemos contar tenemos que medir, lo que significa que se tienen que construir nuevos conceptos. En lugar de "*dos aguas*", "*tres harinas*" o "*cuatro sales*", tenemos que medir y calcular en términos de volúmenes de agua y peso de harina o de sal.

Las categorías y las relaciones que vemos en el mundo no se originan en él; se originan en el cerebro y continúan existiendo allí. Esa es una razón de por qué las matemáticas nunca se pueden explicar con ejemplos – "*aquí hay tres lápices*" – a menos que el concepto matemático ("*la cualidad*

23.-La escritura, borrado y reescritura de dos caracteres alternativos en una tira de papel infinita es la base del concepto revolucionario de Alan Turing, sobre una "*máquina universal*". Muchas de las discusiones de esta idea son matemática y filosóficamente complejas, pero existe una versión legible en HODGES (1985).

de tres") ya exista. Ésta es además la razón de por qué las personas que pueden ver las relaciones matemáticas están siempre dispuestas a señalar ejemplos para iluminar a aquellos que no pueden verlas – "*¿No ves que tengo tres lápices?*". Creen que lo que ellos ven es obvio, sin darse cuenta de que la base de su convicción sobre la cualidad de tres está en su propia mente, no en los lápices que tienen.[24]

Cuando percibimos dos o más objetos o individuos en el mundo, con frecuencia nos damos cuenta de que uno es más alto, más grande, más pesado, más viejo, más pálido, más peludo, más contento o más sabio, o posee muchos más atributos de los aquí nombrados. Hacemos comparaciones. Una vez más, nada en estas relaciones comparativas es inherente al mundo. No hay nada en el árbol que lo haga "*más alto*" que otro – nosotros imponemos la relación.

Y sin haber recibido enseñanza formal, podemos hacer deducciones lógicas sobre relaciones comparativas. Sabemos que si Ann es más alta que Ben, y que Ben es más alto que Carol,[25] entonces Ann debe ser más alta que Carol. No es necesario citar comparaciones como más alto o más grande para ejemplificar las relaciones opuestas que existen en el cerebro y no en la naturaleza. Los atributos simples como altura y magnitud son por sí mismos relativos – con respecto a lo que se considere como estándar. La base más común para la comparación es el cuerpo humano. Cualquier cosa más grande que nosotros es "*grande*".[26]

Ritmo y rima en el conocimiento humano

El cerebro humano tiene acceso a diferentes mundos, o ámbitos de experiencia. Uno de los más obvios es el mundo de la música. La música por sí misma apela profundamente a nuestras emociones, con el poder de apoderarse de nuestra mente y de nuestros músculos, iniciándonos en series de pensamiento o de movimiento rítmico. Y los ritmos musicales proporcionan fuertes conexiones de las que penden los recuerdos.

La poesía y la música son ejemplos obvios de la forma en que los ritmos, que a menudo son una parte visible de la música, se pueden encontrar en conjunción con las palabras. En un nivel más elemental, las cantinelas rítmicas se extienden a los juegos infantiles y al pensamiento humano, tal vez

24.- No os preocupéis por el siguiente desarrollo a menos que no estéis todavía convencidos de que mostrar tres lápices y luego otros dos no demuestra que tres más dos son cinco. Suponed que estáis en un país extranjero, y que no sabéis nada sobre matemáticas o sobre la lengua autóctona y que alguien lleva un puñado de lápices y os dice: "*Aquí hay glerp lápices*". ¿Qué podría significar *glerp*? ¿podría el hablante estar refiriéndose al color de los lápices o a su tamaño o a quién los posee o si son bonitos o feos, baratos o caros, comestibles o venenosos? ¿Cómo podríais decidir según vuestra experiencia que glerp significa un determinado número de objetos (recordad que no tenéis un conocimiento previo de los números)? Y si no sabéis qué significa *glerp*, ¿cómo comprenderíais la demostración de que *glerp* lápices y *strag* lápices son *grunk* lápices? De nada serviría que el hablante enunciara las palabras claramente, moviendo los lápices con énfasis, de la misma forma que todos intentamos hacer cuando hablamos con alguien que no tiene la más remota idea de lo que le estamos hablando.
Podríais objetar que puesto que *glerp, strag* y *grunk* son palabras totalmente extrañas, no existe forma alguna de que la demostración cause efecto. Pero suponiendo que estuvieseis familiarizados con las palabras, de la misma forma que los niños están familiarizados con uno, dos, tres, cuatro, cinco. A los niños se les ha enseñado a contar, y se les da muy bien decir las palabras en el orden correcto. Con seguridad que la demostración funcionaría. Pero supongamos que el extranjero usa palabras familiares para el ejemplo de los lápices. Supongamos que nos dicen, "*marzo lápices más febrero lápices hacen mayo lápices*" ¿Entenderíamos entonces la explicación, puesto que conocemos las palabras enero, febrero, marzo, abril y mayo de memoria y las podemos decir en el orden correcto? La familiaridad de las palabras no aclara los conceptos matemáticos; en realidad, hace que la demostración sea más confusa. Los niños no aprenden el significado de los números por mostrarles ejemplos "*concretos*" de esos números, o mejor, ejemplos de cómo esos números se pueden usar en el mundo físico. ¿Cómo aprenden los niños el significado de los números? Los detalles concretos de esta proeza son un poco complicados (o poco lógicos) y nos ocuparemos de ello en el capítulo preciso de este libro. Brevemente, los niños no aprenden el significado de los números lanzándolos del mundo de los lápices al mundo de las matemáticas; más bien, tienen que desarrollar su comprensión de los números en el mundo de las matemáticas, que a continuación podrán usar para darle sentido a las demostraciones con objetos físicos. No niego que los niños deban ser entrenados para dar la respuesta correcta a "*problemas*" en la clase de 2+3=5, al igual que un perro tiene que ser entrenado para ladrar el número apropiado de veces en situaciones similares. Pero ser capaz de desarrollar una respuesta correcta en situaciones relativamente simples no significa que se haya adquirido ninguna comprensión matemática. Yo podría, con toda probabilidad, aprender *glerp, strag* y *grunk* lo suficiente como para engañar a unos cuantos en un país extranjero, pero eso no probaría que hubiera aprendido nada productivo sobre la lengua del país. No me sacaría de detrás del muro de cristal.
25.- Incluso los niños más pequeños son capaces de extraer conclusiones lógicas de este tipo en situaciones que tengan significado para ellos (NELSON, 1985). Pero eso no significa que los niños darán necesariamente respuestas correctas a preguntas "*lógicas*", especialmente si las preguntas se hacen en un lenguaje poco familiar o se presentan en forma de puzzles deliberados o elementos de examen. La conversión de la situación de Ann, Ben y Carol a una forma abstracta – "*si A>B y B>C, entonces A>C*" – crea dificultades a los niños, y también a los adultos, pero no porque no sean capaces de razonar "*con lógica*". Cuando los patrones subyacentes del pensamiento están desprovistos de contextos familiares, cuando se les transporta a sistemas especializados con su propio lenguaje y sus convenciones notacionales, se convierten en efecto en "*mundos*" distintos. Y las personas pueden encontrarse con un muro de cristal que les hace imposible entrar en ese mundo, incluso si en circunstancias familiares pueden pensar con lógica.
26.- LAKOFF (1987)

mucho más de los que normalmente sospechamos. Las cantinelas son un elemento fundamental del lenguaje, del conocimiento basado en el lenguaje y de las matemáticas.

Gran parte de nuestro aprendizaje aparece en forma de lista de secuencias, muchas de ellas aprendidas como cantinelas, como los días de la semana o los meses del año. Las cantinelas familiares como:

Lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo

O

Enero, febrero, marzo, abril, mayo...

Las diferencias en la facilidad para leer o recitar estas secuencias poco familiares no tienen nada que ver con el orden en el que realmente ocurren los días o los meses, pero derivan del hecho de que hemos aprendido la secuencia original casi como una canción, como una secuencia melodiosa no interrumpida, que se puede repetir solamente en la forma en que originalmente se creó.

En realidad, si queremos saber cuál es el tercer día después del miércoles, probablemente usemos los dedos para repasar todos los días de la semana, al igual que muchos de nosotros tenemos que recitar "*treinta días tiene septiembre con abril, junio y noviembre...*" para averiguar cuántos días tiene el mes en el que estamos. Gran parte de nuestro conocimiento sistematizado se presenta en forma de rimas o cantinelas simples.

La cantinela matemática fundamental – la base de nuestra experiencia numérica más temprana – es lo que los matemáticos llaman los números naturales (o más informalmente, los números de contar). Me refiero a ellos como "*la cantinela de los números*":

Uno, dos, tres, cuatro, cinco; seis, siete, ocho, nueve, diez.

(El punto y coma indican el punto convencional dónde se hace la pausa para respirar o para romper el ritmo).

Algunas veces la cantinela de los números adquiere un tono más poético, como ocurre en las secuencias que comienzan con "*uno, dos, tres, escondite inglés...*"

He deletreado los números del uno al diez, en vez de ponerlos en su forma aritmética:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10

porque al principio los números se aprendieron como palabras, no como parte de las matemáticas. La convención matemática elimina subsecuentemente el 10 de la secuencia escrita (porque es un dígito doble) y añade el 0 (cero) al inicio, creando lo que los matemáticos a veces llaman la línea numérica:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

que no es una cantinela en ningún idioma. Y nadie que cuente un conjunto de objetos, incluso de broma o jugando, empezaría por "*nada*" .[27]

Estas inconsistencias son las primeras de las muchas diferencias entre los aspectos hablados y escritos de las matemáticas. La cantinela de los números se convierte en una desventaja si está demasiado incrustada en nuestro pensamiento matemático; es solamente una de un número infinito de formas posibles de organizar los números y no merece una prioridad especial.[28]

Los niños con frecuencia aprenden el ritmo de la cantinela de los números antes de aprender el orden de las palabras numéricas, y mucho antes de saber qué significan esas palabras y cómo usarlas. Pero reconocen – o dan por hecho – que el orden es importante. Si recitan la cantinela en un orden idiosincrásico, intentarán repetirla en el mismo orden (al igual que repetirán versiones incorrectas de canciones que han aprendido o entendido parcialmente). Los niños demuestran que comprenden la importancia del orden al contar los números antes de estar seguros del orden convencional de los números, por lo que "*contarán*" con las palabras apropiadas en un orden inapropiado – uno, dos, tres, cinco, cuatro, nueve, siete. O introducirán sonidos sin sentido para rellenar los huecos de lo que ignoran.

27.- Esta es la base de la controversia con el año en el que empezó el tercer milenio, si el 2000 o el 2001.

28.- Las razones por las que un simple recuento pueden suponer un obstáculo aparecen documentadas en el capítulo 13.

Hasta ahora todo demuestra la sensibilidad innata del niño ante la secuencia, la consistencia y el orden, elementos centrales en las matemáticas, de los que ellos hacen gala mucho antes de haber aprendido las matemáticas formales. Pero la riqueza y la sensibilidad son todavía proto matemáticas; una cosa es necesaria para completar toda la panoplia de las matemáticas, y esa es la comprensión de los números. El lenguaje, como sistema, tiene número – la diferencia entre singular y plural – pero no tiene números, el significado de todas las relaciones potenciales entre números. Los niños puede que sean capaces de recitar en orden los números del 1 al 10, e incluso aprender de carrerilla que la diferencia entre 7 y 4 son 3. Pero sin la comprensión de por qué la diferencia entre 7 y 4 son 3 y solamente 3, los niños se encuentran todavía en el ámbito del lenguaje diario, no en el mundo de las matemáticas. Todavía no han traspasado el muro de cristal.

Me he referido a la recitación de los diez primeros números como la "*cantinela*" porque se aprende en primer lugar por su ritmo, no por su significado ni por su utilidad. Las cantinelas normalmente no tienen significado alguno (para el que está aprendiendo) más allá de su calidad como canción, sea su utilidad final alfabética, numérica o alguna otra función nemotécnica como los nombres y el orden de los días de la semana y los meses del año. Se aprenden como rimas sin sentido, como "*milikituli, lapotinga, lapotángala se fue la ética poética sinfónica milikituli no sabía lo que hacía, se fue a bailar el ye ye ye ye ye*", que permanecen en nuestra mente de la misma manera.

Pero una vez que estas cantinelas se han asentado con fuerza en nuestra mente, nos podemos referir a ellas con múltiples y prácticos fines, desde recordar el día de la semana hasta implicarnos en las matemáticas más abstractas.

Otras cantinelas matemáticas

La recitación de los números de contar es única, pero no es la única forma en que el lenguaje rítmico hace posible las matemáticas. Otras cantinelas poseen una utilidad matemática considerable, como las tablas de sumar:

Una más una son dos, una más dos son tres, una más tres son cuatro...

Y las de multiplicar:

Una por una es una, dos por dos son cuatro, tres por dos son seis...

Las "*cantinelas de las tablas*", como podríamos llamarlas, no son productivas como los son el alfabeto y los números de contar; no generan nada mas allá de sí mismas. Son las recitaciones ordenadas de hechos, plagios mentales, que nos salvan del problema de tener que pensar ciertas cosas. No es necesario que calculemos el resultado de sumar 2+2 o de multiplicar 3 x 6, porque las cantinelas nos proporcionan la respuesta.

Las cantinelas de las tablas tienen una cosa en común con la cantinela de los números – normalmente se aprenden sin comprender su implicación matemática. En un principio son simplemente palabras sin sentido, porque no se entiende cómo se relacionan unas cantinelas con las otras, o cómo se pueden relacionar con cualquier otra cosa. Un niño que aprende las "*tablas de multiplicar*" no está necesariamente aprendiendo nada sobre la multiplicación.

Una cantinela enormemente productiva que no es matemática es el alfabeto, aprendido en forma de canción con un ritmo distintivo:

A B C D E F G, H I J K, L-M-N-O-P, Q, R, S; T U V, W X Y Z

(las cuatro últimas letras no se repasan convenientemente y poseen varios ritmos y melodías alternativos).

Al igual que muchas de las canciones que aprendimos cuando éramos jóvenes, el orden del alfabeto se queda indeleblemente impreso en nuestra mente. La cantinela forma una cadena irrompible. Muchos adultos tienen que empezar desde el principio a decir las letras para saber cuál viene después de la k, y es casi imposible recitar la lista de atrás hacia delante, a menos que se haya aprendido ese orden previamente, como una cancioncilla distinta.

El alfabeto es un recurso humano rico y productivo porque se puede reordenar infinitamente para formar un infinito número de palabras escritas fácilmente reconocibles en un número infinito de combinaciones. Es lo que el escritor griego Nikos Kazantzakis llamó los 26 soldados del alfabeto que pueden marchar en diferentes formaciones para traernos todos los poemas, historias y juegos jamás compuestos – y no parece que la tecnología electrónica vaya a hacerlas menos vitales en el futuro.

Pero tal vez tan significativo como la literatura para la cultura humana haya sido el orden que el alfabeto introdujo. Las letras del alfabeto realizan muchas de las funciones sistemáticas de los números, en ocasiones conjuntamente con los números, por ejemplo en el esquema decimal de Dewey para organizar los materiales bibliográficos, en las matrículas de los coches y en los códigos postales de algunos países.

Sin el alfabeto existiría bastante menos orden y burocracia en nuestras vidas. Pensemos en todas las listas escolares, papeletas para votar, índices y directorios que dependen de un orden alfabético – innumerables objetos y referencias unidas en base a una cantinela de la infancia y que domina nuestras vidas. El orden alfabético pudiera estar perdiendo su predominio, pero solamente porque los ordenadores pueden realizar búsquedas a gran velocidad para encontrar elementos en una lista desordenada. Conforme avanza la informática, los numerales adquieren más importancia ya que los números de identificación se nos han asignado a nosotros y a los objetos de nuestras vidas, en ocasiones predominando por encima incluso de nuestros nombres.

Relaciones confusas

Incluso las más simples matemáticas pueden convertirse en algo difícil de comprender cuando las expresiones matemáticas precisas y sin ambigüedad alguna se "*traducen*" a lenguaje diario. No existe discusión alguna con respecto a que $6+3 = 9$, a que $6 - 3 = 3$, a que $6 \times 3 = 18$ y a que $6 \div 3 = 2$, desde el punto de vista matemático. A los nexos notacionales se les pueden dar nombres – como más, menos, dividir, multiplicar e igual, y existen además sinónimos – como añadir, restar o substraer, por y hacer. Mientras estos términos se usen para referirse a relaciones matemáticas particulares – como lenguaje matemático – no hay problema. Pero si se espera que las palabras expliquen relaciones matemáticas, puede surgir una gran confusión porque el lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas tienen diferentes significados.

Vuelvo a insistir en que las dificultades existen solamente para los que están aprendiendo y para los que no entienden de qué se está hablando cuando se usan esos términos matemáticos. Para cualquiera que esté familiarizado con las matemáticas, que no tiene problema alguno con la suma (adición), la resta, la multiplicación y la división, el uso casual del lenguaje de las matemáticas parece obvio. Esas personas suelen preguntarse por qué los que están aprendiendo tienen tantos problemas con ello. Para mí supone una dificultad como autor que escribe sobre el tema. A los lectores que están muy familiarizados con "*más*", "*menos*" y otras palabras técnicas les resulta difícil ver por qué las ambigüedades de las que estoy hablando crean problemas. Con seguridad estos significados son obvios. Solo puedo sugerir que dichos lectores traten de imaginar los problemas que tendrían intentando entender "*las explicaciones simples*" sobre cuestiones recónditas de algo que apenas conocen, una discusión erudita sobre física cuántica, sobre microbiología o sobre el postmodernismo.[29] Se encontrarían con un muro de cristal.

Podemos creer que estamos usando un lenguaje claro y familiar cuando le preguntamos a un niño que sume dos números, o que reste uno del otro, pero a menos que el niño ya comprenda qué estamos diciendo matemáticamente, no comprenderá nada de lo que hablamos. Explicarle o ponerle ejem-

29.- Existe un problema similar en la enseñanza de la lectura, donde los estudiantes son incapaces de comprender expresiones como letra, sonido, palabra y oración hasta que comienzan a leer (SMITH, 1999).

plos sobre cómo se usan las palabras en el lenguaje hablado no explica ni ilustra cómo se usan en matemáticas. Pondré unos cuantos ejemplos (los significados matemáticos reales se discuten con más profundidad en el capítulo 8).

• "*Añadir*" (o "*sumar*", "*más*"). Supuestamente la parte más simple de las matemáticas, añadir, es sin duda alguna una situación poco complicada y evidente, como veremos a continuación. Cuando se usa matemáticamente, la palabra "*adición*" se refiere a una relación específica entre números que es esencialmente indefinida, una dirección a través del espacio matemático. Nadie explica qué significa escribir 2+3=5, o decir "*dos más tres igual a cinco*". Se produce la afirmación, a veces con analogías simples pero inequívocas, con la esperanza de que el significado y el razonamiento sean visibles. Y esto no siempre ocurre. Los que están aprendiendo tienden a creer que los hechos matemáticos como 2+3=5 tienen sentido porque se pueden relacionar con algunas situaciones limitadas en el mundo físico, más que con un gran conjunto de situaciones diferentes en el mundo de las matemáticas. Cuando la palabra "*adición*" se usa en el contexto diario, tiene significados bastante diferentes. Si en una receta se nos dice que añadamos leche a la masa de un pastel, se refiere a la operación física, no a la matemática. No se añade 2 a 3 de la forma que se añade leche a un pastel, agua al cemento o amor a una relación. Pastel más helado no es lo mismo que 2 + 3.

Dos más tres no "*hacen*" cinco, obviamente no en la forma en que la tierra y el agua "*hacen*" barro, un atleta hace un equipo, o una tarea hace una nota. Dos "*más*" tres no tiene nada que ver con una hamburguesa más patatas fritas, ni tampoco es análogo a la forma en que se añade un dobladillo a un vestido o una posdata a una carta.

A menos que se hayan ya comprendido los números dos, tres y cinco matemáticamente, habiéndose visto lápices y sabiendo que dos, tres o cinco no tienen sentido. "*Dos*" no es el mismo tipo de palabra que "*amarillo*", "*afilado*" o "*artículo para la escritura*".

• "*Menos*" (o "*sustraer*", "*restar*"). Menos no es una palabra común en el lenguaje diario y cuando se usa – "*Por desgracia, me han sustraído el paraguas*" –, no tiene nada que ver con el significado matemático.

Términos como "*diferencia*" y "*restar*" se usan con frecuencia, pero con un sentido que nada tiene que ver con la relación matemática de la sustracción. La diferencia entre 5 y 2 no es la misma que la diferencia entre el béisbol y el fútbol o entre manzanas y naranjas, y 2 sustraído a 5 no es lo mismo que un juguete sustraído a un niño. No se sustrae dos de cinco de la misma manera que se sustrae un caramelo de un paquete o un vaso de una estantería. Cuando se sustrae dos a cinco, uno no retira nada de ningún sitio.

La palabra "*sustraer*" se usa poco en el lenguaje diario y cuando se hace no tiene nada que ver con el sentido matemático. La sustracción se puede usar para calcular la diferencia entre los dos euros que yo tengo y los cinco euros que tienes tú, pero en realidad ninguna moneda cambia de manos; no hay sustracción alguna.

La explicación de "*menos*" tampoco ayuda mucho a comprender los números "*negativos*", que llevan el signo menos delante. No existe una analogía en el mundo real para la cantidad negativa de cualquier cosa que no tenga que ver con las matemáticas.

Los términos "*positivo*" y "*negativo*" por sí mismos no funcionan en las matemáticas de la misma manera que lo hacen en el lenguaje diario, por ejemplo, con comentarios positivos o negativos. Los números menores de cero no son negativos de la misma forma que son negativas una pregunta, una respuesta o una actitud. Un número negativo no significa "*no*". No es negativo en el mismo sentido en que lo es un cable eléctrico o una fuente de energía (que además supone un uso extraño del término), como tampoco tiene nada en común con el negativo de una fotografía. La complejidad de los números negativos solamente se puede explicar a los principiantes en términos matemáticos.

• "*Multiplicar*" (o "*por*"). Los números no se multiplican como lo hacen las hierbas o los conejos. La multiplicación no es una suma repetida, ni en matemáticas ni en el mundo en general, no importa las veces que así se defienda en los libros de texto. Los textos de biología, por otra parte, certifican que las células se multiplican dividiéndose.

A los niños normalmente se les dice que "*multiplicar*" significa "*veces*" y que las "*tablas de multiplicar*" se expresan en "*veces*" – "*cuatro veces tres es doce*". Sin embargo, en el lenguaje normal, el verbo "*multiplicar*" no significa "*veces*". Simplemente significa "*aumentar*". El mandato bíblico "*creced y multiplicaos*" no significa que uno se añada a sí mismo un determinado número de veces; significa tener hijos. Los problemas se multiplican cuando hay más de uno, pero no como resultado de adiciones repetidas. La persona que dice "h*e visto esta película tres veces*" no está calculando, está midiendo.

• "*Dividir*". No se divide un pastel de la misma forma que se divide cinco entre tres. La analogía popular de cortar en porciones un pastel no muestra lo que ocurre cuando se divide un número. En el lenguaje diario, dividir significa partir o compartir, no necesariamente en partes iguales, o separar una parte de un todo. La división no es una resta repetida, ni en las matemáticas ni el mundo en general, no importa con qué frecuencia los libros de textos defiendan esa afirmación.

Existe un indicio en el hecho de que los diccionarios no ofrezcan explicaciones para el uso matemático de ninguno de estos términos que he enumerado. En un diccionario normal, por ejemplo, las definiciones para el verbo "*añadir*" hablan de "*unir*", "*mezclar*" e "*incrementar*" en el caso del lenguaje diario, y a continuación ofrecen la vacua definición "*realizar una adición matemática*" en el caso del sentido matemático.

• "*igual*". El símbolo más difícil de todos. Igual no significa "*igual que*", "*equivaler a*" o "*la respuesta es*". Dos más tres no es igual a cinco en el mismo sentido en que cinco caramelos son igual o equivalen a otros cinco. En matemáticas, un número diferente de cosas pueden ir con el signo "*igual*"; por ejemplo, cualquier cosa hecha en una parte debe hacerse en la otra, y todo lo que se haga en una parte se puede reemplazar por todo en la otra parte. No existe similitud alguna con el concepto de igualdad en el lenguaje natural.

En el mundo fuera de las matemáticas, los adultos y los niños normalmente no dicen que dos cosas son iguales si una se puede sustituir por la otra; por el contrario, dicen que las cosas "*son equivalentes a*" "*tan como*" "*tantas como*" "*tan grande como*" o en algunas ocasiones "*puede reemplazar a*". No dicen que un corcho es igual a un tapón que se enrosca para cerrar una botella. Las tan usadas frases "*igualdad de derechos*" e "*igualdad de oportunidades*" no tienen equivalencia matemática. Por lo tanto, ¿qué significa decir a un principiante en matemáticas que dos más dos son igual a cuatro? La comprensión – que ambas partes de la ecuación tienen el mismo número – solamente puede provenir desde dentro de las matemáticas.

Muchos otros términos matemáticos se usan con frecuencia en el lenguaje diario, por ejemplo, total, lugar, columna, solución y respuesta[30] pero no es necesario pormenorizar sobre este punto. Otros dos conceptos muy familiares – contar y número – son conceptos tan importantes en el lenguaje matemático que cada uno de ellos requerirá una parte sustancial de un capítulo en este libro.

Habiendo desacreditado todos nuestros modos de habla diarios sobre conceptos matemáticos, ¿puedo ofrecer alguna alternativa? La respuesta es "*no*", porque los términos matemáticos no se pueden traducir al lenguaje de cada día. El lenguaje de las matemáticas no es equivalente al lenguaje natural. No estoy diciendo que la terminología de las matemáticas no se pueda entender, porque obviamente se puede. Pero la comprensión de la terminología matemática tiene que provenir desde dentro de las matemáticas, no del lenguaje diario que usamos para hablar de ellas.

30.- Diagonal es una palabra especialmente provocativa, aunque se usa con ligereza en muchas discusiones sobre geometría, porque se sabe que los niños tienen dificultades incluso en percibir y reproducir las diagonales (Olson, 1970). Es una palabra raramente usada en el lenguaje diario, tal vez porque normalmente no nos encontramos con diagonales, salvo en diseño. Los diccionarios ofrecen "*oblicuo*" e "*inclinado*" como definiciones para diagonal, que a malas penas tienen que ver con las matemáticas.

CAPÍTULO 4

Los significados de los números

Con frecuencia se dice que los niños deberían desarrollar un sentido numérico. Aún así muchas personas desarrollan su vida matemática sin pensar en dicho sentido. Si se les preguntara, probablemente dirían que el significado del número 4 es cuatro de algo. Eso es obvio ¿no? Pero los números normalmente carecen de sentido fuera de las matemáticas y no está muy claro cuál puede ser "*el sentido numérico*" dentro de ellas. Una persona puede adquirir una comprensión general de cómo se deben comportar los números o cómo se deben relacionar unos con otros dentro de las matemáticas pero no se puede hablar de "*sentido*" de la forma en que tenemos sentido del olfato o del tacto. Los números no toman su significado de ninguna cosa del mundo físico, sino de nuestra mente y del mundo matemático que las mentes han creado.[31]

El significado del lenguaje

Todo esto es bastante diferente de la situación que se da con el lenguaje. Normalmente no oímos decir lo importante que es que los niños desarrollen "*un sentido de las palabras*" para comprender que las palabras tienen significado o para "*desarrollar buenos conceptos de las palabras*". Se da por sentado que los niños entenderán qué es el lenguaje, y es mejor así porque ¿cómo podríamos explicarles que las palabras tienen un significado y que los sonidos que las personas constantemente emiten a su alrededor contienen cierto sentido? Los niños muestran esa percepción básica a los pocos meses de nacer.

Los niños buscan el orden y el sentido en su experiencia y lo hallan, en el caso del lenguaje, en la forma en que el habla se organiza y se usa. Encuentran las tres C – coherencia, consistencia y

31.- Es normal atribuir a los niños un sentido de los números – e incluso a los animales – porque son capaces de discriminar entre diferentes cantidades. Pero el hecho de que los pájaros, chimpancés y niños puedan distinguir entre conjuntos de 2, 3 y 4 objetos, e incluso indicar que un conjunto es más grande que otro, no significa que tengan noción alguna de la numeridad. Simplemente significa una sensibilidad hacia el tamaño, la cantidad o la magnitud. Un problema es que es casi imposible para los adultos que saben contar pensar en la cantidad sin pensar en los números, y es absolutamente imposible hablar con precisión de cantidades sin usar los números. (Podemos hablar de grupos pequeños y grupos grandes, pero eso no supone distinguir entre grupos de 2, 3 o 4). La palabra cantidad con frecuencia se toma como sinónimo de número. Las investigaciones que indican que los animales y los niños pueden distinguir diferentes cantidades normalmente les atribuyen un sentido innato de los números cuando lo más que puede decirse es que tienen un sentido no numérico de la cantidad. Stanislas Dehaene se refiere con frecuencia a las cantidades como "*números*" en una publicación sobre un estudio de investigación titulado The Number Sense (1997) – aunque pone el mismo término entre comillas en el texto e insiste en que él no cree que el cerebro contenga una "*unidad aritmética*" predestinada a los números y a las matemáticas.
Huttenlocher, Jordan y Levine (1994) mostraron que los niños de 5 o 6 años pueden realizar sumas o restas simples o resolver problemas fáciles como añadir o quitar dos piedrecillas. Pero los niños de 2 años pueden resolver problemas similares de forma no verbal, sin las destrezas convencionales para el cálculo, por ejemplo, indicando el número correcto de elementos cuando ven que se han añadido o quitado dos elementos del grupo que previamente se les había enseñado y luego se les había escondido. Los niños son capaces de hacer esto aproximadamente a los 2 años, pero el cálculo no verbal lo hacen exactamente 6 meses después, cuando empieza a aparecer el "*juego simbólico*" (una cosa representa otra).

consenso – en los sonidos que las personas emiten y en cómo ellos responden cuando dichos sonidos les son devueltos. El significado se da por hecho. Cualquier cosa que carezca de significado, que no tenga sentido aparente, se ignora. La cuestión de la adquisición de un "*sentido de las palabras*" o de entender que las palabras tienen significado nunca se plantea.

No estoy diciendo que los niños no carezcan de la comprensión del significado de determinadas palabras – por supuesto que les ocurre. Incluso los adultos en ocasiones dicen "*¿Qué significa eso?*" cuando les aparece una palabra que no les es familiar. Pero las afirmaciones sobre la comprensión de los números no se refieren a números concretos, como el 5, 9 o 11. No oiremos nunca a nadie decir, "*Me pregunto qué quiere decir quince*", de la misma forma que se podría decir "*Me pregunto qué significa cándalo*". Por el contrario, la aseveración matemática sugiere que los que están aprendiendo pudieran carecer de una comprensión general de los números, de la misma forma que puede un individuo carecer de la comprensión de una sección de un código informático o de una secuencia del genoma.

Una de las razones más importantes por las que el lenguaje y las matemáticas son diferentes es la relación tan especial que las personas mantienen con este primero. El lenguaje se encuentra literalmente al final de nuestras terminaciones nerviosas. El significado del lenguaje es inseparable de la forma en que percibimos los objetos, las categorías y las relaciones en el mundo. Los bebés cuando buscan sentido a los sonidos que oyen a su alrededor, encuentran significado a partir de sus propios sentimientos, de la relación con otras personas y de las experiencias en el mundo físico.

Pero el mundo de las matemáticas no está en la persona, ni en el mundo físico, sino que es un mundo por sí mismo. Es en el mundo de las matemáticas donde hay que buscar el significado de los números.

El significado de los números

Encontramos al menos tres cosas erróneas cuando decimos que los números son cantidades de objetos:

1. La respuesta requiere una pregunta. Decir que 4 significa cuatro de algo es como decir que rojo significa algo que es rojo (o de color rojo), o que húmedo significa algo que está húmedo. La respuesta no te dice nada; es circular – cuatro significa cuatro.

2. La respuesta está incompleta. Si un número tiene que representar una cantidad de algo, ¿qué podría significar el número 742.984.347? Yo no conozco nada de lo que exista 742.984.347. Aún así, 742.984.347 es un número tan válido como cualquier otro, y con tanto significado como cualquier otro número. No es necesario que piense en algo que aparezca 742.984.347 veces para poder hacer algo con el número.

3. La respuesta es incorrecta. Incluso si el significado de 4 fueran cuatro de algo, como un puñado de lápices, ese no sería el significado de 4 en un sentido general. No es necesario que nos refiramos a cuatro de algo para confirmar que 3 x 4 = 12. Podemos calcular que 3 veces 4 hacen 12 y lo podríamos hacer hasta en la luna sin tener ninguna cantidad de nada a nuestro alrededor. Los números están separados de las cantidades. Cuantificar es algo que hacemos con los números, pero no es su significado.

Tenemos que distinguir entre el significado de los números y su utilidad. Lo que hacemos con los números es una cosa [como contar, comparar y calcular,] pero lo que son los números es otra muy distinta. Es como la distinción entre la naturaleza de los ladrillos y sus usos. Los ladrillos se pueden usar para todo tipo de edificaciones, y también con otros fines. Pero eso no es lo que son los ladrillos. Los ladrillos son arcilla u otro material de un determinado tamaño, forma y consistencia. No importa cómo se usen, o si se usan o no; siguen siendo ladrillos. ¿Qué tienen los números que los hace ser números independientemente de cualquier uso que se les pueda dar?

La respuesta es que los números son relaciones. ¿Relaciones con qué? Con otros números. ¿No es esto circular y completamente auto referencial? Sí. Eso es lo que caracteriza exactamente a los números. Los números no obtienen su significado de nada que no sea de ellos mismos.

(En ocasiones los números ni siquiera se relacionan entre ellos, por ejemplo, cuando se usan como etiquetas de identificación en las camisetas de los deportistas. Esos números carecen de propiedades matemáticas. Esta rareza se considerará en el capítulo siguiente).

La base del sistema numérico es muy simple; consiste en los dos conceptos de los que ya hemos hablado en las cantinelas matemáticas – uno y más. Cada número tiene una magnitud. El resto son relaciones. Uno es uno, dos es uno más que uno, tres es uno más que dos, y cuatro es uno más que tres. Uno, dos, tres y cuatro son simplemente nombres que damos a los conceptos que construimos (o que otros han construido antes que nosotros), una cadena de "*unos*" reiterativos.

A partir de aquí podemos comenzar la elaboración. Cuatro no es solamente uno más que tres, es dos más que dos. Además es dos veces dos, y uno menos que cinco. Seis es tres veces dos, la mitad de doce, la raíz cuadrada de 36 y cualquier otra relación que podamos pensar de seis. El número 742.984.347, entre otras cosas, es tres veces 247.661.449.

Hasta ahora hemos cruzado el límite entre lenguaje y matemáticas, detrás del muro de cristal. Estamos discutiendo sobre números, no sobre palabras. En el momento en que comencemos a construir números sobre números y a examinar sus relaciones mutuas, habremos abandonado el lenguaje natural y habremos entrado en el mundo de las matemáticas.

Los logros humanos más complejos se construyen normalmente a partir de las ideas más simples. La idea de colocar un bloque de piedra sobre otro es algo muy primitivo, pero los rascacielos y los puentes se han construido a partir de ese principio básico. ¿Qué podría haber más simple que una rueda, una marca en un papel, una llama o una nota musical? Incluso la moderna tecnología electrónica, con sus elaboraciones extensas y laberínticas, no se compone más que de una simple apertura y cierre de interruptores en circuitos eléctricos.

Imaginemos un suministro infinito de bloques para la construcción. Con un bloque lo único que se puede hacer es mirarlo. Con dos bloques, se puede poner uno encima del otro. Con tres, se puede construir una pared, un puente o una torre. Cuanto más se examinen los bloques, más usos se les pueden encontrar y más elaboradas serán las construcciones que se pueden realizar. Si otras personas están haciendo lo mismo, pronto se verá el horizonte repleto de construcciones de todo tipo, en una variedad infinita, más de lo que cualquier persona pudiera explorar o comprender, mientras que se siguen encontrando nuevas formas de usar los bloques. Lo mismo ocurre con los números.

Lo mismo ocurre con la música. ¿Queremos ver qué se puede hacer con un bloque básico de construcción de un sonido musical? Echemos un vistazo a todas las canciones y sinfonías del mundo.

Los números constituyen un sistema independiente. Pueden encontrarse en cualquier cosa fuera de las matemáticas, digamos, en los conceptos de uno y más, pero a partir de ahí todo en las matemáticas proviene de dentro de la gran superestructura de los números. No se puede uno salir del sistema para traer otra cosa de fuera, como un color o un tono musical – o un puñado de lápices. Una vez que hemos determinado el significado de uno y de más de uno, hemos determinado todo el sistema numérico y la base completa de las matemáticas. Por supuesto, no se conoce todo sobre las matemáticas – y se puede uno pasar la vida entera sin llegar a conseguirlo. Pero ya se tiene un poderoso equipo de construcción y la herramienta básica para ampliar y explorar las diferentes cosas que se pueden hacer con los números. Al menos por un momento, estamos en la otra parte del muro de cristal.

La precisión de los números

El cálculo matemático puede ser muy preciso. No solamente sabemos que 3 es mayor que 2, sino que la diferencia es exacta. Si aplicamos este razonamiento a los lápices o a lo que pagamos por una bolsa de patatas, sabemos con exactitud de qué estamos hablando. Pero la capacidad para saber con precisión lo que los números significan fuera de las matemáticas se agota con rapidez.

Una cosa es comprender el significado matemático de enunciados como, "*un millón es mil veces mayor que mil* ". Pero eso es un enunciado matemático. ¿Qué significa eso en el mundo en general? - ¿un millón de algo – de euros, de hectáreas – significa algo además de una cifra muy alta, mucho más alta que 2000 euros o 2000 hectáreas? ¿Qué significan para nosotros 2000 euros o 2000 hectáreas – o incluso 20 euros o 20 hectáreas – además de una relación entre números? ¿Tienen esos enunciados algún sentido, aparte de lo que podemos saber de los números en sí?

¿Qué sentido le podemos sacar al enunciado de que hay aproximadamente 52 semanas en un año o de 28 a 31 días en un mes? ¿Qué significan 28, 31 o 52, aparte del hecho de que son números? ¿Podemos trasladar los números de su mundo independiente (y por lo tanto, circular) y llevarlos al mundo del lenguaje o al mundo físico, de una forma que los podamos comprender?

La respuesta a todas estas preguntas es que todos los números, además de un puñado de palabras en una cantinela numérica, no significan nada en absoluto, excepto por su relación con otros números. No podemos imaginar grandes cantidades, no con precisión. No podemos imaginar un millón de nada – un millón de personas, un millón de lápices, un millón de euros -, si acaso saber que son muchos (y solamente en determinadas circunstancias). No podemos imaginarnos 500 de nada, no digamos de 2000, así que ¿qué sentido tiene enunciar que un millón es mil veces mayor que mil? Esto nos conduce a una situación extraña. Sabemos que el enunciado es correcto, pero no sabemos qué significa. O mejor dicho, entendemos el enunciado en un sentido matemático, pero no en ningún otro sentido.

¿Qué tamaño tienen que tener los números para que tengan sentido? Hasta cuatro puede ser posible dar sentido a los números, o a las cantidades. Por encima de cuatro, los números no tienen sentido, excepto en cuanto a otros números, y excepto por los enunciados muy generales que podemos hacer sobre un número, que sea igual que, mayor que, o mucho mayor que otro.[32] Algunos teóricos dirían que cuatro es una cifra demasiado generosa – que tres, o quizás incluso dos, sería más apropiado.

¿De dónde conseguimos el cuatro? Cuatro es casi el límite de número de cosas que podemos cuantificar de una ojeada – sin contar. Normalmente no tenemos problema alguno para decir cuántos pájaros hay en una valla, o cuánta gente hay en un grupo de discusión, si hay dos o tres. Cuatro es más difícil y cinco es todo lo más que podemos decir, sin contar. A partir de ahí, todo son estimaciones (como las estimaciones sobre el tamaño de una multitud) – un procedimiento muy impreciso, incluso entre individuos con experiencia en hacerlo. A veces podemos acertar si miramos alrededor de una habitación y decimos que vemos seis personas. Pero normalmente nos equivocaremos. (Y en ocasiones nos equivocaremos si pensamos que hay solamente cuatro o cinco, si indicamos que son suposiciones más que percepciones exactas).

El periodo numérico

Existe un nombre técnico que designa la capacidad que todos tenemos de identificar de un vistazo cuántos objetos hay en un grupo pequeño. Se le llama repentización (*subitizing*), "*percibir*" cuántos objetos hay sin contarlos; en otras palabras, sin usar las matemáticas. Los primeros estudios experimentales se llevaron a cabo a final del siglo XIX para determinar el tamaño de lo que se había llamado "*periodo numérico*" (o "*periodo de detención*"). La respuesta fue siete como mucho y nunca de

32.- ROLAND BARTHES (1980) argumenta que los números no tienen significado en las historias, solamente en los contextos matemáticos. Pone el ejemplo del agente secreto James Bond que descuelga uno de sus cuatro teléfonos que tiene sobre el escritorio. Barthes dice que la palabra cuatro funciona en la historia solamente como un referente de "*tecnología burocrática altamente desarrollada*". No habría diferencia alguna si hubiera habido cinco teléfonos o nueve; el número no tiene relevancia matemática.

33.- WOODWORTH y SCHLOSBERG (1954, p.94) y MANDLER y SHEBO (1982).

forma consistente.[33]

¿Cuántos puntos negros hay en esta línea?

•••••••••

¿Los podemos decir sin contarlos? Tratemos de echar un vistazo a un puñado de monedas o a un montón de libros. Hasta un total de siete, en ocasiones se puede conseguir el total correcto de un vistazo (en combinación con una buena intuición). Para estar seguros, tenemos que contar. Hemos entrado en el mundo de las matemáticas.

Las personas pueden equivocarse con cuatro o cinco objetos – pero no es frecuente – y pueden estar en lo cierto con un máximo de hasta quince objetos – pero tampoco es frecuente. Y en ese caso solamente porque están adivinando o tratando de calcular de alguna otra manera. Se podría decir que las personas que no están en disposición de contar comienzan a adivinar a partir de tres o cuatro – y la probabilidad de acertar depende de cuántas alternativas haya. Teniendo pocas alternativas – cuatro o cinco – se acertará casi todas las veces. Si se tienen muchas alternativas – diez o más – casi todas las veces la estimación será errónea.

La experiencia ayuda, pero solamente para engañar al sistema. Es una ventaja predisponer la mente para ver parejas o tríos (triángulos). Y por supuesto, es de gran ayuda que los objetos estén dispuestos de una forma fácilmente reconocible, por ejemplo, en formaciones de tres o cuatro ángulos. Por tanto, un resultado correcto es más una cuestión de cálculo, que entra a hurtadillas antes o después del vistazo, que una percepción.

Los investigadores pueden siempre decir si una persona, en un experimento de repentización, está contando – necesitan más tiempo para decir si está percibiendo cuatro, cinco, seis o siete objetos. Otro apreciable descubrimiento experimental fue que el tiempo requerido para decir cuántos objetos hay en grupo se mantiene constante hasta seis o siete objetos, por encima de los cuales el tiempo necesario aumenta, lo que indica que se usa el recuento cuando se trata de grupos mayores de objetos. Pero el resultado solamente es válido en el recuento. Para la estimación – mirar a un grupo de objetos y adivinar cuántos hay – no se tarda más cuando se miran 200 que cuando se hace lo propio con 10.

Así pues, ¿cuál es la conexión entre el periodo numérico – una limitación visual – y el significado de los números? Lo que no podemos ver de una ojeada, no lo podemos visualizar ni imaginar. Es difícil que comprendamos los números mayores de seis o siete – especialmente los números mucho mayores – porque no podemos imaginar cantidades de esa magnitud. Podemos visualizar cinco coches en un aparcamiento, pero no cincuenta ni 500, excepto como una masa. Incluso la diferencia entre una masa de cincuenta y una de 500 no es fácil de imaginar, excepto que sabemos que una masa es sustancialmente mayor que la otra.

Podemos relacionar un determinado número de euros con algo práctico, por ejemplo, el tipo de coche que nos gustaría comprar algún día o el número de días que pasaríamos de vacaciones. Pero lo que estamos haciendo aquí es reducir algo matemático a algo verbal, a un enunciado más que a una expresión numérica. Decir que determinada cantidad de dinero es suficiente para comprar 1.000 automóviles, más que 900 o 1.100, tiene muy poco sentido (excepto para una gran compañía que esté pensando en comprar una flota de automóviles – e incluso en ese caso el significado sería "*suficiente*", "*insuficiente*" o "*demasiado*").

Esta es la razón por la que palabras como día, semana y mes son tan útiles. Es más fácil pensar en cinco días que en 120 horas, pensar en cinco semanas que en 35 días y pensar en cuatro años que en 48 meses o 208 semanas. Incluso pensar en el paso del tiempo es mucho más cómodo si se hace en términos de palabras con significado compacto que en términos de números desprovistos de palabras.[34]

34.- Pueden darse algunas excepciones. Las expresiones como 24 hora, 48 horas e incluso 72 horas se han establecido en el lenguaje diario como sinónimos de días, dos días, tres días. Pero para que 48 horas tuviera sentido numérico, debería contrastar con periodos de 47 horas o 49 horas, no con 24 ni con 72, y no encuentro circunstancias en las que podría surgir dicho contraste. (¿Son estas conversiones de días a horas más científicas, poseen más autoridad o son una simple lisonja? Menciono esto porque he oído hace poco a un político que aseguraba que habría dispuesta una unidad de "*emergencia*" con unas 96 horas de antelación.

La falta de sentido de los números largos

No estoy diciendo que los números largos carezcan de sentido, pero sí que aparte de las distinciones básicas como "*más*" y "*menos*", su único significado se encuentra dentro del sistema matemático. Y he dedicado bastante tiempo a este punto porque a veces se ha dicho que las personas tienen un sentido inadecuado de los números o que carecen de importantes "*destrezas numéricas*" porque no comprenden "*de verdad*" la diferencia, digamos, entre un billón y un millón, porque reaccionan de igual manera si un político les informa de que un proyecto en particular costará cinco millones de euros como si les informa de que cuesta cinco billones de euros.

Creo que es cierto, pero no creo que la ignorancia matemática sea la causa ni que la formación matemática sea la solución. Los números como cinco millones o cinco billones son incomprensibles. Como magnitudes son incomprensibles. Son literalmente inimaginables. Aparte del hecho de que cinco billones es mucho más que cinco millones, no hay mucho más que decir sobre ellos fuera de las matemáticas – si acaso que cinco billones es mil veces mayor que cinco millones.[35] Y no solamente son cinco millones tan inimaginables como cinco billones, igualmente lo es un millar.

Podría suponer una ayuda si dividimos los números largos en cantidades más pequeñas. Si tomamos 250.000.000 como el número aproximado de habitantes de los Estados Unidos, entonces el presupuesto de un millón de dólares sería equivalente a 4 dólares por hombre, mujer y niño del país. Podría ser útil la idea de la porción del pastel, pero no nos dice mucho sobre el tamaño del pastel en total, especialmente cuando hay 250.000.000 porciones.

Esto no significa que las personas no puedan comunicar mejor la magnitud de los números largos, o entenderlos. La forma de hacerlo es a través de analogías. Decir que cinco billones es una ballena en comparación con un atún que es cinco millones es una metáfora razonablemente gráfica (siempre y cuando uno no sea muy quisquilloso y pregunte si lo que se está comparando es la longitud, el volumen o el peso de la ballena y del atún). Si el trasatlántico Queen Mary, fondeado en Long Beach, California, se colocara en posición vertical, sería tan alto como el Empire State Building de Nueva York. ¿Pero qué significa el peso del Empire State Building para nosotros, matemáticamente hablando? Dichas analogías son muy corrientes en la astronomía popular – si la tierra fuera un balón de baloncesto en la ciudad de Nueva York, la luna sería una pelota de béisbol a cinco kilómetros y el sol una cúpula con el tamaño de un apartamento en la otra parte de Washington, DC. Estas analogías caseras no nos ayudan a comprender los números largos; nos permiten evitarlos, nos permiten permanecer cómodamente en el mundo físico al otro lado del muro de cristal.

Desde "*uno*" y "*más*" – con la precisión de "*exactamente uno más*" – se puede construir el sistema numérico completo, infinito en formas infinitas, un mundo a su manera. Esto no se podría realizar sin la creatividad humana. Son necesarias las tecnologías – una tecnología para nombrar con economía las secuencias numéricas infinitas, una tecnología que haga visibles los números de forma productiva y sistemática, una tecnología que lleve a cabo todo tipo de operaciones sobre y con los números.

El cerebro humano estableció las primeras relaciones importantes de "*uno*" y "*más*", pero a continuación los números por sí mismos comenzaron a imponer sus demandas por lo que las personas tuvieron que crear las inevitables tecnologías, ideando formas de crear y explorar todas las relaciones dentro del sistema numérico, y de explotarlas con fines útiles. Las matemáticas y las personas se prestan servicio unas a otras.

35.- En el sistema de medidas de Norte América, los billones corresponden a mil millones (1 seguido de 9 ceros). En el Reino Unido, Francia y Alemania, un billón es mil veces más grande, un millón de millones (1 seguido de 12 ceros). al billón europeo se le llama trillón en Norte América (mil billones norteamericanos, o lo que es lo mismo un 1 seguido de 12 ceros), mientras que un trillón europeo es un millón de billones europeos (1 seguido de 18 ceros). Tales discrepancias en cuanto a terminología entre los principales países, cuando todo lo demás ya está "*estandarizado*" se puede explicar solamente si estas enormes cifras carecen de sentido, incluso para las personas que las están usando. Cuando los números se escriben con propósitos matemáticos, que es cuando únicamente el significado exacto importa, no existe confusión computacional, solamente un total alejamiento de la realidad diaria. En este libro, se respetan las convenciones norteamericanas para los trillones y los millones, como si no tuviera mucha importancia.

CAPÍTULO 5

Los números (I): Los nombres

El verbo "*contar*" tiene dos significados diferenciados pero igualmente significativos en la lengua inglesa. Uno de los significados de contar significa recitar – recapitular en voz alta cantinelas numéricas familiares:

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

He llamado a esto cantinela porque los niños normalmente se familiarizan con los números a modo de cancioncilla sin ninguna utilidad obvia (al igual que recitar el alfabeto carece de sentido para un niño con ninguna comprensión de la lectura y de la escritura). Los niños que pueden contar con una cancioncilla se familiarizan con los nombres de los números y con su orden, pero no necesariamente con sus usos. Pero lo que ellos muestran con respecto al orden es importante. El orden invariable es esencial en las matemáticas, aunque para los niños es simplemente el modo de aprender una canción o una cantinela. Saben que deben fastidiarse con las letras. No es más "*correcto*" decir "*uno, tres, dos*" que lo sería "*a, c, b*" o "*milikituli, lapotinga, lapotángala se fue la ética poética sinfónica milikituli no sabía lo que hacía, se fue a bailar el ye ye ye ye ye*"

La simple cantinela que los niños aprenden a recitar por primera vez, y que todo el mundo da por sentado, es el comienzo de la solución de un problema que persiguió a nuestros ancestros durante milenios – encontrar un modo eficaz y conveniente de hallar nombres para los números. El otro significado principal del verbo contar es llevar la cuenta, o cuantificar, usar los números para determinar el total de algo. Este es el significado de la palabra cuando hablamos de contar nuestro cambio o el número de pájaros que hay en una valla. Contar en este sentido es un acto matemático, que yo consideraré en detalle en el capítulo 7. El sistema de cuantificación será el tema del presente capítulo.

Cálculo sin números

Al principio – según la mitología matemática – se llevaban las cuentas sin números, se razonaban los totales antes del desarrollo del cálculo. Ese tipo de recuento es un aspecto de las protomatemáticas, la zona gris entre el lenguaje y las matemáticas, y un punto de partida para muchos niños.[36]

36.- Incluso los niños pequeños responden a la diferencia entre dos o tres objetos o sonidos. Muestran sorpresa si cuentan más o menos de lo que se les ha hecho esperara (DEHAENE, 1997, capítulo 2). Pero es probable que estén estimando más que contar, respondiendo a la cualidad del número, no al número en sí.

La arquetípica fábula de llevar cuentas tiene que ver con un pastor que mete una piedrecilla en el zurrón cada vez que saca una oveja al prado por la mañana y saca una piedra cada vez que una oveja vuelve al redil por la noche. Si quedan piedras en el zurrón es que faltan ovejas. Si no queda piedra alguna, es que están todas las ovejas. Si hay más ovejas que piedras, una oveja descarriada que vagaba se ha unido al rebaño o se ha cometido algún error.

Existe un considerable logro intelectual en esta simple actividad. A pesar de la obvia disimilitud, se da por hecho que en cierto sentido cada piedra equivale a una oveja. Una piedra "*representa*" una oveja. Es más fácil alinear piedras en filas que ovejas, y es más fácil comparar montones de piedras que montones de ovejas. Pero eso no es matemáticas. No existen números con los que describir conjuntos de piedras.

Las matemáticas llegaron cuando hubo conciencia de que el número (con el significado de total) de piedras era igual al número (total) de ovejas, una percepción para la que era necesario que estuviera establecido el sistema de cálculo. Las matemáticas descansan no en la relación entre piedras y ovejas, sino en la relación entre piedras (u ovejas, o cualquier otra cosa) y el número. Han tenido que pasar muchos siglos para que los descendientes de aquel apócrifo pastor reordenador de piedras tuvieran un sistema de números que pudiera mediar entre los montones de piedras y los rebaños de ovejas. O antes de que se pudiera usar un sistema de números para obtener un control intelectual del tiempo, del espacio y de otros innumerables aspectos de la experiencia humana.

Se han propuesto muchos otros escenarios en los que se pueden haber desarrollado los recuentos sin números además del mencionado con el pastor que contempla sus rebaños, como es el monarca que calcula el tamaño de sus armadas, los mercaderes que canjean grano o especias, los granjeros que esperan una inundación o la cosecha y los marinos que registran la duración de un viaje. Por supuesto, todo es una fantasía. Nadie lo sabe en realidad.

El recuento probablemente surgió de diferentes maneras en diferentes lugares y en diferentes épocas, paso a paso más que a pasos agigantados, como un "*siguiente paso*" lógico e inevitable en el desarrollo humano que vino con la organización social, con las actividades planificadas como la caza, el comercio o la guerra, y con las tecnologías implicadas en construcciones a gran escala y proyectos agrícolas.

Los ejemplos concretos más tempranos de lo que podría ser un sistema de recuento son pequeñas piezas de hueso de animal grabados con muescas, normalmente interpretados como el registro que los cazadores hacían de sus presas. Pero es difícil ver el valor de dicho recuento. No tendría sentido alguno mostrar el hueso a otra persona y decir, "*Estos son los bisontes que he matado esta temporada*", antes de que existiera el concepto de número. Ni siquiera habrían sido capaces los cazadores de comparar las muescas de un hueso con las del hueso de otro cazador o de otra época, más allá de la mera observación de que las muescas resultaban "*parecer*" más, menos o las mismas.

Lo que le faltaba al pastor o al cazador – y lo que le falta al sistema de recuento – es un método de cálculo. Estaban lejos de darse cuenta de que siete piedras como un total podían representar un total de siete ovejas, porque carecían de una palabra "*siete*", y ningún significado que aplicarle a la palabra. Todavía no existía el concepto de número.

Comparar recuentos

Los pastores probablemente no estaban satisfechos por no poder asegurar que sus ovejas volvieran al redil cada noche. Deberían de haber comparado el tamaño de su rebaño con el de sus vecinos, o con el número de ovejas que tenían al principio de la estación.

Una manera simple de realizar este juicio sería comparar montones de piedrecillas para decir "*Tengo más piedrecillas que tu, por lo tanto, tengo más ovejas que tu*". Si los pastores pudieran comparar sus piedras con un rebaño de ovejas, las podrían comparar con otros montones de piedras.

Dichas comparaciones se harían en base a un atributo visual familiar, el tamaño relativo de un montón. Es probable que los pastores ya estuvieran haciendo juicios sobre más grande, más pequeño o igual en otras circunstancias. Ni siquiera estarían haciendo nada original si pusieran los montones de piedras en sus manos y compararan sus pesos relativos. Incluso es probable que usaran un término como "*más*" en el sentido de masa – como en "*Tiene más gachas que yo*". Todavía no estaban operando con el concepto numérico de más (o menos, o lo mismo).

Una desventaja similar se podría aplicar al siguiente hipotético avance tecnológico, que era que los pastores alinearan en filas sus colecciones individuales de piedras, para comparar la longitud de dichas filas. La idea de poner las piedrecillas en una fila podría haber provenido del uso del palitos para contar, similares a los huesos de los cazadores, donde los objetos o los acontecimientos estarían representados por una línea de muescas.

Las filas de piedras o de muescas pueden ser una ayuda visual útil para comparar totales, pero continúan sin ser un elemento matemático. Si mi fila de piedras tiene mayor longitud que tu fila, entonces debo suponer que tengo más ovejas que tu. Y puede que esté equivocado. Las piedras deben mantener una separación igual. Extender una fila separando las piedras no aumenta el total de piedras o de ovejas. Para comparar dos filas, las piedras de cada fila deben estar emparejadas. Lo que importa es el número de piedras, una idea matemática.

Esto es algo que los niños no comprenden instintivamente. Conocidas demostraciones realizadas por el psicólogo Jean Piaget indicaron que los niños normalmente creen que cuatro caramelos colocados muy separados son "*más*" que cinco caramelos colocados más juntos, que

♥ ♥ ♥ ♥

son más que

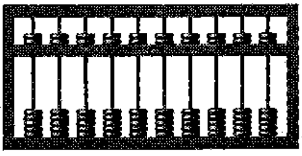
♥♥♥♥♥

esto no es porque los niños no "*puedan*" – no es necesario saber contar para emparejar caramelos –; es porque estos niños todavía no han adquirido el concepto de número. Pueden ver "*más*" en términos de tamaño, pero no en términos de cantidad. Comprenden el concepto "*cuánto*", pero no "*cuántos*".[37]

De las piedrecillas a las cuentas

Existe en inglés y en muchas otras lenguas un recuerdo permanente del papel tan significativo que desempeñaron las piedrecillas en el desarrollo de las matemáticas. La palabra griega para designar una piedra pequeña es calculus. Por supuesto, la palabra sobrevive como el nombre de un método sofisticado de análisis numérico (calculus) y es la raíz de la palabra calcular.

Las piedrecillas ya no se usan como elementos de computación, pero es probable que dieran origen a la tecnología del ábaco, que pronto se convirtió en universal y continúa usándose hoy día. En vez de colocarse en el suelo, las piedrecillas se colocaron en ranuras en pequeños bloques de piedra. La palabra griega abacus significa bloque de piedra. Las ranuras en la piedra del dispositivo para contar fueron posteriormente reemplazadas por varillas de alambre, que se colocaron dentro de un marco de madera que pudiera transportarse con facilidad, como una calculadora electrónica de bolsillo.



(Fig. 5.1)

37.- Mucho se ha argumentado sobre la razón por la que los niños tienen dificultad con los problemas de "*conservación de los números*" de Piaget, centrándose en la poca familiaridad del lenguaje y del entorno experimental. Para más información, ver HUGHES (1986, capítulo 2), BEILIN (1976) y DONALDSON (1978).

Al ábaco y a las ranuras en la arena o en la piedra de las que éste se derivó se les refiere en ocasiones como los marcos de contar. Pero el término es inapropiado. El ábaco apenas se usa para contar, en el sentido de llevar la cuenta del total de algo, aunque es cierto que contribuyó crucialmente al desarrollo de un sistema numérico eficaz. Mucho más importante en la práctica, hasta nuestros días, fue la función del ábaco como marco para calcular, para manipular números.

La palabra número tiene al menos tres significados:

1. se puede referir a palabras habladas, como cuando decimos "*uno, dos, tres*" o "*quinientos setenta y seis*".

2. se puede referir a los numerales escritos, como cuando escribimos 1, 2, 3 o 576.

3. se puede referir a un sistema abstracto de ideas (o conceptos), por ejemplo cuando pensamos en "*3*" (en oposición a "*tres ovejas*"), "*576*" o "*3 veces 192 son 576*"

Inventar las palabras habladas y los numerales escritos (significados 1 y 2 antes mencionados) eran problemas tecnológicos específicos, que requerían cada uno de ellos una solución inventiva. Pero comprender el número como un sistema abstracto (significado 3) suponía un problema conceptual profundo, que requería nuevos modos de pensamiento.

El primer gran concepto tenía que ser que había una cosa que era el número, que hacía que tuviera sentido pensar y hablar de cantidades matemáticas más que de propiedades físicas como tamaño, peso o masa. ¿Pero cómo pensar en cantidades sin un sistema numérico? Ese era el gran reto, como mínimo. Y la respuesta fue: poco a poco. La verdadera idea del número no se le ocurrió a una sola persona, o en un solo momento.

El nacimiento de los números

El lenguaje hablado tenía ya palabras para "*uno*" – con el significado de un solo objeto – y para "*más de uno*" (o "*muchos*"). En muchas lenguas, el artículo indefinido "*un una*" es la misma palabra que se usa para "*uno*" (número cardinal). Y muchos términos matemáticos todavía persisten, por ejemplo "*algunos*", "*pocos*" y "*varios*". Lo que las matemáticas necesitaban era la idea de organizar una serie de "*más de uno*" de un modo sistemático e identificar cada elemento sucesivo de la serie con un nombre distintivo.

El primer y crucial paso era dar un nombre distintivo a "*más de uno*". En el momento en que a uno y uno se les llamó "*dos*", este término se consideró una entidad independiente. (Las lenguas en ocasiones reconocen dos como una unidad conceptual independiente fuera de las matemáticas – de la forma que en inglés o en español se habla de un par o de una pareja).

A continuación la idea de un sistema numérico se habría consolidado dándole un nombre distintivo a "*uno más de dos*", que por supuesto se le llamó "*tres*".

Conforme los números fueron nombrados, se pudieron realizar enunciados sobre ellos independientemente de los objetos a los que se aplicaran. Uno más de tres se convirtió en cuatro, y uno más de cuatro se convirtió en cinco, consistentemente y sin posibilidad de duda, tanto si estaban implicadas o no las ovejas. Los números se convirtieron en cosas sobre las que las personas podían hablar.

Se había descubierto el mundo de los números, y las matemáticas se separaban del lenguaje natural y del mundo físico. Cualquiera que no entendiera esto permanecería fuera, mirando al muro de cristal.

La diferencia entre tamaño y orden

No era necesario que el primer avance conceptual llegara con los números que se usaban en el sentido de recuento (uno, dos, tres…). Podría haber llegado con los números que indicaban orden en una secuencia (primero, segundo, tercero…).Las palabras para "*primero*" y "*siguiente*" podrían haber existido en el lenguaje diario. Con la perspectiva matemática, el siguiente al primero se convirtió en el "*segundo*", y el siguiente al segundo se convirtió en el "*tercero*", y así sucesivamente.

Los números para contar se conocen técnicamente como cardinales – refiriéndose a "*tamaño*" – y los números secuenciales como ordinales – refiriéndose a "*orden*". Puesto que se usan los mismos números tanto para propósitos cardinales como ordinales en las matemáticas escritas, la terminología técnica apenas se usa en la vida diaria y no se convertirá en punto importante en este libro. Pero sí se debería reconocer que los números tienen estas dos funciones distintivas y que la capacidad del que aprende para usar los números en un modo no supone capacidad para usarlos en el otro.

Para poder contar, en el sentido de alcanzar un total, es necesario comprender tanto lo cardinal como lo ordinal. Para contar objetos, siete piedras o siete ovejas, cada una debe ser contada una y solamente una vez, usando los números en su orden correcto – uno, dos, tres…. con el significado de primero, segundo, tercero…(uso ordinal de los números) – usando el número final (en este caso, siete) reconocido como el total, con el sentido cardinal de la palabra.

Existe una tendencia universal a asumir – a menudo erróneamente – que si una palabra existe, entonces aquello a lo que se refiere debe tener existencia. Por ejemplo, si es posible referirse a una persona justa o alegre o inteligente, entonces algo llamado justicia, felicidad o inteligencia debe también existir, cuya naturaleza "*verdadera*" debe determinarse a través de la investigación, la reflexión o la argumentación. El impulso de "*materializar*" ha persistido a través del tiempo en muchas controversias filosóficas y doctrinales poco fructíferas y todavía hoy continúa.

La inclinación a considerar la primera y segunda piedras de un surco (o las ovejas en el campo) como que tienen la propiedad de "*uno*" o de "*dos*" o de "*primero*" o de "*segundo*" permite que nazca la idea de que los números tienen existencia independiente, que esperan a ser nombrados y usados, sin estar necesariamente unidos a ningún objeto o relación en particular dentro del mundo físico. Los números podían examinarse como objetos de derecho y en relación con ellos se podían hacer descubrimientos útiles o dignos de mención. La filosofía ha creado un enorme rompecabezas de todo ello, y mantiene un debate sin fin sobre si los números constituyen una realidad por sí mismos, independientemente de cualquier función matemática. Pero estos debates siempre inciertos no han evitado la elaboración prolífica del sistema numérico.

La idea de dar nombre a los números fue el primer paso necesario en el avance hacia unas matemáticas coherentes, pero se requerían dos avances técnicos antes de que las matemáticas pudieran considerarse algo preciso y controlable. Los números – en abstracto – son infinitos, y lo mismo ocurre con sus potenciales nombres y formas, pero la memoria humana tiene límites. Los avances necesarios son:

1. una forma sistemática de identificar los números de modo que los nombres nuevos no tengan que ser ideados y recordados continuamente. (Imaginemos tener que recordar un nombre único y específico para cada número que nos podamos encontrar, al igual que las personas a las que conocemos tienen sus propios nombres).

2. una forma escrita eficaz para los números de forma que las situaciones numéricas se puedan registrar y comunicar, para poder llevar a cabo operaciones complejas con números, haciendo que el cálculo sea posible.

Dar nombres fue un problema para la lengua hablada y su representación, un problema para la

37.- La posible prioridad histórica del sistema ordinal puede indicarse por el hecho de que la lengua inglesa (aunque no todas las lenguas) tiene palabras únicas para "*primero*"(first) y "*segundo*"(second) que no se derivan de sus correspondientes cardinales "*uno*"(one) y "*dos*"(two). "*Tercero*"(third) se encuentra en una categoría intermedia, y a partir de ahí los ordinales en inglés se forman añadiendo a los cardinales la terminación "*th*" – fourth, fifth…Una dependencia similar hallamos en los adverbios ingleses que se refieren a números de ocasiones o acontecimientos. Existen palabras únicas para designar "*una vez*" (once), "*dos veces*" (twice) e incluso "*tres veces*" (thrice), en vez de usar las dos palabras "*una-vez*"…pero a continuación el sistema cardinal lo asume otra vez – cuatro veces, cinco veces, seis veces…diez mil veces. Para un análisis más detallado de las formas lingüísticas distintivas de los números pequeños, ver Hurford (1987).

lengua escrita. Damos por hecho que el modo en que decimos los números – "*dieciséis*", "*cincuenta y nueve*", "*ciento siete*" – se refleja fielmente en cómo se escriben – 16, 59, 107. Pero los números hablados y escritos son sistemas relativamente distintos, como veremos en el próximo capítulo.

SOLUCIONES A MANO

La necesidad del lenguaje hablado era encontrar una sucesión de nombres para "*uno*", "*más de uno*", "*más de uno y uno*", etc., que fueran fáciles de comprender, manipular y recordar.

La primera tecnología para contar la teníamos literalmente en la mano. Se trataba de la utilidad aritmética de los dedos. El recuento probablemente se hizo con los dedos mucho antes de que se emplearan los palitos o las piedrecillas. Con frecuencia, los niños comienzan a contar y a calcular usando los dedos, y la palabra que usamos para los números individuales – dígitos – se relaciona con el uso de los dedos para contar. Los dedos fueron los ordenadores digitales primigenios, y los primeros nombres que se le dieron a los números provenían de las partes del cuerpo.

La idea de contar y de comunicar cantidades a través del uso de las distintas partes del cuerpo parece que es algo universal. A veces el ámbito alcanza una mano, a veces las dos, con o sin la inclusión de los pulgares. Muchos grupos humanos no se pararon aquí y continuaron con los dedos de los pies, las muñecas, los codos, los hombros, los tobillos y otras partes del cuerpo. Creían que los números podrían indicarse por medio de las partes del cuerpo.

Los dedos inspiraron el nombre de diferentes números, dependiendo de qué dedos se usaran. También pudieron demostrar que dar nombre a los números o numerar objetos era algo secuencial, en un orden tan fijo como la progresión de los dedos en la mano. Los nombres de las partes más relevantes del cuerpo se podían recitar sistemáticamente, de una forma ritual – el origen de la cantinela de los números.

El sistema base

El método de los dedos y las manos fue la base para el siguiente avance – que los números se podían agrupar y dichos grupos podían nombrarse y contarse. En vez de "*cinco dedos*" se puede decir "*una mano*". En vez de tener que idear y recordar un nombre único para veinticinco, uno se podía referir a cinco cincos, o cinco manos o un puñado de manos. La referencia a los cinco dedos como "*una mano*" o a los diez dedos como "*dos manos*" debe haber sido la precursora de la tecnología de reagrupamiento de los números en decenas, centenas, millares, etc., una inspiración importantísima que hizo posible tanto la expresión de números infinitamente largos y la productividad y conveniencia del cálculo matemático.

A la reagrupación de los números en un modo jerárquico se le conoce como sistema base. Y al tamaño del grupo se le conoce como la base. Nuestro método convencional de cálculo con grupos sucesivos de decenas se le conoce como el sistema de "*base 10*".

En vez de seguir con los problemas representacionales y de memoria que suponía encontrar nombres únicos para cada número (y quedarse sin partes del cuerpo), fue posible usar un grupo básico de números una y otra vez. En un sistema de base 5 (una mano), diecisiete corresponde a tres manos y dos dedos. Se podía contar hasta veinticinco – un puñado de manos – o incluso hasta ciento veinticinco – un puñado de puñados de manos – sin tener que memorizar más de cinco nombres (uno, dos, tres, cuatro dedos y una mano).

Por supuesto, se podía seguir con puñados de puñados, pero entonces volvían a surgir los problemas de memoria y de complejidad. La alternativa – y esto fue otro avance tecnológico que llevó a las diferentes culturas muchos siglos adoptarlo – fue emplear un cálculo de dos manos completas como base, y a continuación darle nombres distintivos a los grupos, y a los grupos de grupos.

Así pues, a los números de uno a diez se le dieron nombres individuales (uno, dos, tres, cuatro....hasta nueve). A los grupos de decenas se les dieron nombres distintivos (diez, veinte, treinta.....hasta noventa) derivados de los números de las unidades (una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro decenas...nueve decenas), y después se acuñó otro nombre distintivo para un grupo de diez decenas – una centena. Los nombres para las centenas se construyeron directamente de las unidades (una centena, dos centenas, tres centenas....nueve centenas) hasta llegar al millar. No hacen falta más nombres nuevos para las decenas o las centenas de millar, pero a continuación tenemos los millones, y los billones y los trillones, e incluso números muchos más astronómicos con los que pocos de nosotros podemos familiarizarnos. Este es el sistema decimal (del griego diez) en el que los números están ordenados en sucesivos grupos de decenas.

El agrupamiento además solucionó el problema de cuántas cuentas se podían poner en el alambre del ábaco. Tantas cuentas como unidades hay en el sistema base. Para un sistema de base 10, cada cuenta del segundo alambre representaría toda una longitud de diez cuentas del primer alambre. Y cada cuenta de los sucesivos alambres representaría una longitud completa de diez cuentas del alambre precedente.[39]

Los números agrupados en base a decenas, decenas de decenas, decenas de decenas de decenas, etc. introdujeron otro elemento vital en las matemáticas, a saber, el orden en las partes componentes de los nombres de los números. Cuando se expresa un número mayor que nueve, los componentes más largos aparecen en primer lugar (al igual que el brazo viene antes de la mano y la mano antes de los dedos). Decimos "*seis cientos sesenta y seis*", y no "*sesenta y seis seiscientos*" o "*seis sesenta y seiscientos*". Existen una cuantas excepciones flagrantes en varios sistemas numéricos, como es el caso de "*seventeen*" (literalmente "*siete-diez*") en vez de "*ten-seven*" (diecisiete) en inglés, o "*quatrevingts*" (literalmente, "cuatro veintes"), en vez de "*ochenta*" en francés, e incluso en usos poéticos y coloquiales. Pero el principio general de primero el elemento más largo predomina cuando hablamos de los números, y es invariable en las matemáticas escritas. Esto hace posible la organización sistemática de los números sobre el papel, y todo el cálculo numérico.

Los nombres reales que se han dado a los distintos números o grupos de números son, por supuesto, arbitrarios y en cada lengua se les ha asignado de un modo idiosincrásico como resultado de la casualidad histórica. El sistema inglés tiene "*eleven*" (once) y "*twelve*" (doce) cuando lo lógico sería "*one-teen*" y "*two-teen*". El francés, después de comportarse bastante sistemáticamente en todas las decenas hasta sesenta ("*soixante*") de pronto nos sorprende con "*sesenta-diez*" ("*soixante dix*") para setenta. Ninguna de estas irregularidades queda reflejada en la forma escrita de los números.

A pesar de la inconsistencia ocasional en el nombramiento, la economía y productividad del sistema de base 10 es enorme, tanto en las matemáticas habladas como en las escritas. Con apenas 25 nombres distintos – nueve para los números del "*uno*" al "*nueve*", tal vez media docena de nombres nuevos para "*diez*" hasta "*diecinueve*", ocho más para los grupos de diez desde "*veinte*" hasta "*noventa*", además de las palabras para centenas, millares y millones – se pueden expresar billones de números diferentes.

Y se pueden expresar sistemáticamente. Una vez que se sabe que el nueve sigue al ocho, se sabe que cuatrocientos nueve sigue a cuatrocientos diez, y que novecientos doce es mayor que ochocientos ochenta y seis. Incluso los números largos son fácilmente colocados en orden. Como medio de establecer un orden secuencial y de ordenar o identificar los números de inmediato, el sistema base no tiene parangón.

39.- Muchos ábacos, incluyendo los que se usan en la actualidad, tienen cinco cuentas en cada alambre más una pareja adicional para indicar si las cinco están siendo usadas una primera o una segunda vez. Así pues el ábaco funciona como un sistema de base 10, aunque se usan solamente siete cuentas en cada alambre. El ábaco de cuentas y alambre es un invento chino relativamente moderno (siglo XIX a.C.), antes de eso, los chinos usaban varillas y astillas de bambú para contar. En muchos otros lugares se usaron toda una variedad de tablillas (pizarra, tablero) y "*contadores*" (monedas, botones, piedrecillas) como formas de este artefacto universal. Los tableros ajedrezados ("*checkered*") usados para contar en Gran Bretaño dieron origen en inglés al término "*Exchequer*" con el que también se conoce al Ministerio de Hacienda – además de dar origen a la palabra "*cheque*".

Sistemas base alternativos

El sistema de base 10 no es el único ni necesariamente la mejor base para la construcción de un sistema numérico. Las alternativas populares han sido el 12 y el 60, e importantes sistemas que emplean estas bases se siguen usando hoy día.

La división del año en 12 meses de aproximadamente 30 días fue una decisión que se tomó teniendo en cuenta consideraciones de tipo astronómico. Es la cantidad de tiempo, aproximada, que tarda la tierra en completar una vuelta alrededor del sol (o viceversa, como en un principio se pensó) y la luna en completar una vuelta alrededor de la tierra. La decisión de subdividir el día en 24 horas, la hora en 60 minutos y los minutos en 60 segundos fue una elección arbitraria de los sistemas de base 12 y de base 60. La "*medida angular*", por la que el círculo se divide en 360 partes o grados también es un reflejo del sistema de base 60, donde cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. No existe nada necesario por lo que elegir estas unidades. El ejército usa un sistema "*mil*" para dividir los blancos donde disparar en 6400 partes, en vez de usar el sistema de 360 grados.[40]

Existe un sistema en la actualidad que desafía la preeminencia del sistema de base 10. El sistema binario (base 2) empleado universalmente en ordenadores "*digitales*" y otros artefactos electrónicos tiene solamente dos números, el cero y el uno. Tan pronto como se pasa de uno contando, hay que volver al cero otra vez – uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis son 1, 10, 11, 100, 101 y 110 respectivamente. El sistema binario tiene varias ventajas especiales que lo hacen útil para el funcionamiento informático y la aritmética computacional. En efecto, cada 0 y 1 pueden representar el cierre y la apertura de una entrada o interruptor electrónico.

Existen un par de razones por las que no es probable que se use el sistema binario en las matemáticas humanas. La primera es que los números binarios consumen espacio con demasiada rapidez – 75 en sistema decimal tiene que escribirse 1001011 en sistema binario. La segunda es que los números binarios resultan difíciles de decir y de recordar – no existen nombres especiales para los números superiores a cero y uno. Ninguna de estas razones supone problema alguno para los ordenadores, que tienen enormes memorias, gran rapidez de operación y no se tienen que preocupar por dar nombres o identidades distintivas a los números de dos o más.[41]

Los sistemas de base son modos alternativos de expresar números, pero los números en sí, los moradores abstractos de un mundo que se encuentra detrás del muro de cristal, permanecen inalterables independientemente del sistema. El número que nosotros escribimos como 49 en un sistema decimal es el mismo número en el sistema de base 12 (duodecimal), en el sistema de base 16 (sexagesimal) y en el sistema binario, incluso si ese número se escribe como 41, 31 y 110001, respectivamente. El 49 del sistema decimal sigue siendo un número cuadrado (7 x 7) y el 7 continúa siendo un número primo (divisible solamente por la unidad y por sí mismo) cualquiera que sea el sistema en el que esté escrito. Los números – en el mundo de las matemáticas – no se ven afectados por cómo hayamos decidido llamarlos.

40.- Llamado mil porque cada 1/6400 parte de la circunferencia de un círculo es aproximadamente una milésima parte de un radián (que es equivalente al radio de un círculo).

41.- Los técnicos informáticos han introducido varios términos híbridos con propósitos no matemáticos, como los "*bites*" (grupos de ocho dígitos binarios), seguidos por los kilo bites (mil bites), mega bites (un millón de bites) y nano bites (un billón de bites). Estos inventos combinan la nomenclatura de dos sistemas, el binario y el decimal, con fines conversacionales, pero son inútiles para el cálculo preciso en ambos sistemas.

CAPÍTULO 6

Los números (II): su representación escrita

El desarrollo de un sistema de base eficaz solucionó muchos problemas numéricos, pero no todos. En concreto, no resolvió el problema de cómo representar los números que tenían que verse más que oírse. En realidad, el sistema decimal de base 10 estaba totalmente desarrollado antes del advenimiento de los números escritos como hoy los conocemos. Los problemas que había que resolver para que los números fueran manejables eran bastante diferentes de los problemas relacionados con la construcción de un sistema numérico hablado.

El cambio de las matemáticas habladas a las escritas es sustancial para los individuos y para las culturas. El cerebro y el papel juntos pueden realizar lo que el cerebro a solas no es capaz, no solamente en la realización de cálculos, sino en la ampliación de lo que se puede hacer con el sistema numérico. Las matemáticas despegaron cuando se hicieron visibles.

No es necesario que los niños inventen un nuevo sistema de contar para ser capaces de hacer matemáticas en un papel (o en un ordenador), pero sí necesitan descubrir por qué los números escritos son como son, si es que van a usar los números entendiéndolos.

Extender los números en el espacio

No existiría el cálculo sin la representación visual. No se puede sustraer 35 a 93 con los dedos. Pero la sola escritura de los números no era la solución. "*Noventa y tres menos treinta y cinco*" así escrito sería tan difícil de calcularse en papel como con los dedos o con la cabeza.

Para que sean útiles, las matemáticas escritas tenían que tener sus características y convenciones distintivas. Una vez más, se presentaban dos problemas principales, ninguno de los cuales podría resolverse con la ayuda del lenguaje hablado. Uno de los problemas era encontrar un método de representar números individuales, y el otro era encontrar la mejor manera de reorganizar grupos de números espacialmente.

Una primera solución para el problema de la representación era volver a las muescas, o mejor, modificar una práctica antigua convirtiéndola en un sistema más formal. Los primeros tres números romanos, I, II, III son réplicas obvias de las muescas. En realidad cuando se grabaron por primera vez eran muescas. Pero es difícil contar muescas de forma precisa, incluso cuando están reagrupadas. En seguida nos vemos desbordados por el número de marcas individuales. Y la computación es bastante inferior a lo que es posible hacer con el ábaco. ¿Cuánto es IIIIIII multiplicado por IIIIII? (La respuesta correcta es IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII).

El sistema romano usaba símbolos únicos para las diferentes bases – V para cinco; X para diez, L para cincuenta, C para cien, D para quinientos y M para mil. Los números del uno al diez eran I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, VIIII, X. Esto resulta extremadamente torpe – veinte (dos decenas) se convierte en XX, no IIX, que por diferentes convenciones se convierte en ocho. (Y que requiere que se lea de derecha a izquierda lo mismo que de izquierda a derecha en el mismo sistema, para determinar si los símbolos adyacentes se tienen que sumar o restar). Pensemos en la dificultad de hacer incluso un simple cálculo, como 17 + 34, que en números romanos es XVII + XXXIV, y que por no se sabe qué razón suman LI. Aún así, los científicos y los eruditos se esforzaron por usar el sistema durante siglos y con él realizaron algunos de los cálculos más notables en astronomía, geometría y la construcción de tablas trigonométricas.

Otra alternativa era usar letras del alfabeto – en orden alfabético, no como abreviatura de las palabras habladas – para los números. Los griegos así lo hicieron y supuso un gran avance, porque así se reconocía que los símbolos escritos no tenían que estar relacionados ni con las muescas ni con el lenguaje hablado. Serían únicas para el lenguaje de las matemáticas. Por ejemplo, la letra griega ypsilón (Â), quinta letra del alfabeto griego y por lo tanto el símbolo escrito para el número cinco, no estaba relacionada con la palabra griega para cinco, o con cualquier signo para cinco. Era una completa abstracción. Pero los antiguos griegos continuaron trabajando con este sistema y, en vez de reiniciar en el diez o en el doce para seguir un sistema de base, continuaron hasta que se les agotaron las letras del alfabeto.

Finalmente, se desarrollaron los caracteres distintivos 1, 2, 3, 4, 5, eliminando las letras del alfabeto de donde originalmente habían partido. Estos no se pueden predecir en absoluto a partir de ninguna forma del lenguaje hablado – como los signos +, - e = no tienen relación evidente con las palabras "*más*", "*menos*" e "*igual*".

Un nuevo problema

El sistema de base 10 se adoptó a partir del lenguaje hablado, por lo tanto no era necesario tener más de 10 caracteres numéricos distintivos. Pero todavía quedaba pendiente la cuestión de cómo indicar el tamaño de los grupos en cualquier ocasión concreta, para distinguir, por ejemplo, sesenta de seiscientos o seis mil. La solución era lo que se conoció como sistema posicional.

¿Qué les ocurre a los números escritos cuando se componen de más de una unidad escrita? ¿Cómo representar "*diez más uno*", "*diez más dos*", etc.? Lo que a nosotros nos parece tan obvio, no lo era en absoluto para los antiguos que intentaban solucionar el problema. Ignorando por el momento el problema de cómo representar diez, ¿debería diecisiete escribirse como diez más siete, o siete más diez, o con un símbolo para diez por encima de siete, o con qué? ¿Cómo se deberían indicar los números que tenían más de un dígito, bien fuera horizontal o verticalmente, de forma consistente?[42]

Una solución posible era escribir los números completos, de forma que tres cientos cuarenta y siete se escribiera igual que se leía:

3 x 100x, 4 x 10, 7

Resultaba fácil decir ese número - trescientos cuarenta y siete – pero era menos fácil escribirlo. Durante miles de años la gente tropezó con sistemas que implicaban símbolos adicionales para las decenas, centenas y millares, de forma que trescientos cuarenta y siete se escribiría como tres patos, cuatro peces y siete, o tres cuadrados, cuatro triángulos y siete.

Fue un descubrimiento brillante darse cuenta de que eran redundantes los símbolos adicionales para números mayores de nueve y que los valores se podían indicar simplemente colocándolos en

42.- Me refiero a "*izquierda a derecha*" como el orden en el que se escriben tanto los números como las letras (pero no necesariamente se leen) porque esa es la convención en la lengua que estoy usando. Resultaría molesto escribir siempre "*izquierda a derecha, derecha a izquierda, de arriba hacia abajo, de abajo hacia arriba cualquiera que fuera la convención*", pero esto es lo que siempre se debe tener en cuenta. Igualmente asumo que el ábaco al que me refiero se construye o se coloca horizontalmente, de forma que los alambres y las líneas de cuentas forman hileras y no columnas.

una secuencia – que trescientos cuarenta y siete se podían simplemente representar como 347. Este tremendo desarrollo introdujo en la representación matemática no solamente la economía y la permanencia y la portabilidad relativas, sino también el concepto de orden e invariabilidad, no solamente en la secuencia de los números en sí (1, 2, 3, 4, 5), sino además en el modo en que se escribían. El número 347 tenía que representarse espacialmente de esa forma exacta, no como 437 ni como 374.

E incluso esta solución no fue tan obvia como en un principio pudiera parecer para la escritura de izquierda a derecha. Para empezar, se podría considerar una solución regresiva. Mientras que la invención de unidades nominadas como 3 y 7 eliminaba la necesidad de contar unidades individuales – III y IIIIIII – era necesario una vez más el recuento de símbolos individuales que permitiera determinar si un numeral indicaba decenas, centenas, millares, etc.

Y lo que es más, el recuento se debía hacer de derecha a izquierda (para poder identificar unidades, decenas, centenas, millares, etc.), mientras que los valores se colocaban de izquierda a derecha, reflejando así el hecho de que el valor más largo aparecía en primer lugar en el lenguaje hablado.

Moverse a una nueva dimensión

El sistema posicional resolvió el problema de la representación de los números mayores de nueve. Pero continuaba siendo muy difícil calcular con números más largos, por ejemplo, para computar la suma de 5387 y 126. La solución fue moverse a una segunda dimensión y alinear los números en columnas, por ejemplo:

5387
+126
=5513

Todo esto nos resulta obvio en la actualidad (aunque no tanto a los que están aprendiendo), pero pasaron siglos antes de que una cultura desarrollara las matemáticas con este descubrimiento – que se pueden hacer cosas con los números si se les organiza en columnas. Y todavía quedaba un gran problema, cuya solución era, sin duda alguna, obvia o universal. En realidad, la solución ofendió las creencias de muchas personas sobre cómo deberían funcionar las matemáticas.

La historia del 0

Hasta ahora he evitado referirme al número "*cero*". He dicho "*cuatrocientos cinco*" aunque tenía que escribir 405. He dicho "*diez*" y "*cien*" aunque he escrito 10 y 100. A menos que estemos literalmente hablando de nada, el 0 es tan ubicuo en los números escritos que nunca aparece en el lenguaje hablado. No es necesario. Es un fenómeno estrictamente de las matemáticas escritas.

¿Qué se hace si no hay centenas, o decenas o millares en un número? Esto no supone problema alguno en el lenguaje hablado; se puede decir "*ochocientos cinco*" sin tener que hacer una pausa, toser o cualquier otra cosa que indique la ausencia de decenas. Esto tampoco suponía un problema para la escritura si se deletreaba todo.

Por ejemplo, el número
8 x 100, 5 (para el que ahora escribiríamos 805)
estaba tan claro como
8 x 100, 7 x 100, 5 (para 875)

¿Pero qué se podría hacer cuando la posición relativa indicara el tamaño de una unidad – cuando el significado de 875 fuese reconocible debido a la regla de que el dígito de la derecha indicaba unidades (en este caso, 5), el siguiente dígito a la izquierda indicaba las decenas (en este caso, 70) y el siguiente a la izquierda las centenas (800)? ¿Cómo indicar las centenas, las decenas y las unidades cuando no había centenas ni unidades? Se intentaron varias soluciones, como dejar un espacio vacío, distinguiendo así 8 5 (ochocientos cinco) de 85 (ochenta y cinco), o incluso insertando una marca, como un guión o un cuadrado, para indicar que esa posición no estaba llena (como 8_5 o 8 5). Pero esto no suponía ayuda alguna, porque no se sabía que hacer con ambos símbolos (o con el espacio vacío) en el cálculo. ¿Cómo podían estas cosas ocupar el lugar de los números?

La solución a todos estos problemas una vez más nos resulta obvia en la actualidad. Se pone un cero, que actúa él mismo como un número:

426
+ 300
= 726

la cadena numérica cambió de:
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez
a:
cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve
escrito:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
que a continuación sigue:
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
y continúa: 20, 30,… 100, 200,…

Lo que a nosotros nos resulta indudablemente lógico y evidente fue uno de los conceptos más difíciles de comprender, incluso para los matemáticos más brillantes. Fue rechazado ampliamente como algo sin sentido, si no ilógico y sacrílego, el tener un número que no representaba nada.[43] La cuestión más importante al respecto era que los números se podían emparejar con conjuntos de cosas. ¿Cómo podía un número corresponderse con nada? ¿Con qué se emparejaba el 0? Aquí existe un enorme muro de cristal entre el mundo de las matemáticas y el mundo físico.

En cualquier caso, la mayor parte de las veces el 0 no corresponde a nada. Pudiera corresponder a "*ninguna decena*" en el número 805, pero eso es diferente del concepto de nada; no significa que no haya algo, solamente que no hay decenas (o unidades o centenas). ¿Y cómo es posible que un número superior a 100 no tenga centenas? Esta lleno de centenas. Y al igual que los demás numerales, el valor de 0 dependía de su posición. El 0 en 805 tenía un significado diferente del 0 en 850.

Todo esto era difícil de digerir para los antiguos matemáticos, especialmente porque se creía que todos los números tenían una realidad concreta. Y si el 0 a veces actuaba como cualquier otro número, por ejemplo, al sumar 305 y 420, o incluso – con un salto conceptual – 5 y 0, la multiplicación de 0 o por 0 parecía imposible, o muy ilógica e inconsistente. Tiene sentido que 2 x 2 = 4 y que 2 x 1 = 2, pero ¿qué ocurre con 2 x 0? Si 2 x 0 es igual a nada, entonces x veces 0 son igual a nada. Ningún otro número se comporta así. En la multiplicación, 0 parece que borra todo con lo que entra en contacto. Y en cuanto a la división, dividamos algo por cero y la respuesta es inimaginable (¡por

43.- Para una discusión más profunda de las consecuencias fuera de las matemáticas de la introducción del número 0, ver Rotman (1987). Harris (1995) dice que el cero no tiene nada que hacer en el lenguaje. Fue la solución para un problema de alineación en las matemáticas escritas antes de que adquiriera valor matemático como número.

44.- Existe la ampliamente difundida creencia entre estudiantes y profesores de que 0/ 0 = 0. Tsamir, Sheffer y Tirosh (2000) encontraron que la prohibición matemática de dividir por cero colisionaba con la intuición de que toda operación matemática tendría como resultado un número, provocando así frustración e incomprensión. Solamente el razonamiento matemático puede explicar por qué la división por 0 debe ser siempre indefinida – que conforme el divisor es más pequeño, el resultado es mayor hasta que se acerca al infinito, que tampoco es un número. Los esfuerzos por parte de los estudiantes y de los profesores por explicar el razonamiento a través de ejemplos concretos de la lógica diaria (nada dividido por nada debe ser nada) resultan improductivos.

eso los matemáticos declaran la división por 0 ilegal!).[44]

Incluso hoy día, las personas tienden a creer – o a decir – que 0 representa nada, y que tiene el mismo significado en la secuencia 0, 1, 2, 3… que en los números 805 o 300. Pero cualquiera que sea el significado que tenga 0, en el mundo abstracto de las matemáticas, no es nada. Es algo mucho más significativo que eso.

En realidad existe una descripción muy precisa y totalmente consistente de lo que es el número 0, que es uno menos que uno. No es uno de algo menos que uno de algo, que en realidad sería nada de algo, sino simplemente uno menos que el número uno (y por lo tanto, un número). Es una relación, no una cantidad, algo, no es nada, un elemento esencial en los patrones tensamente construidos del tejido numérico. Si el 0 es un concepto tan difícil de manejar para tantos adultos, históricamente y en la actualidad, ¿cómo les parecerá a los niños y a los que están aprendiendo? Los antiguos tuvieron que ingeniárselas para inventar el cero y así cubrir las bien definidas necesidades en sus sistemas numéricos. Pero los que en la actualidad aprenden se enfrentan a una tarea opuesta: descubrir cuáles son las necesidades que el 0 cubre.

No estoy diciendo que los niños no puedan aprender a usar el 0 en la aritmética simple sin comprender su relación con los demás números. Pero examinar el movimiento no significa comprender. Y al igual que muchos otros aspectos del aprendizaje de las matemáticas sin comprender, como resultado de tareas de repetición y memorización, hará que el aprendizaje y la retención sean mucho más difíciles. Puede resultar ser un enorme obstáculo para el desarrollo de una comprensión matemática más profunda.

Los raros dominios del negativo

El número 0 presta servicio a otra función crucial. Actúa como un puente o un eje entre los números positivos (que van desde el 1, 2, 3…) y los números negativos (que van en dirección opuesta desde -1, -2, -3…). Los números negativos no podrían haber existido sin las matemáticas escritas; son un concepto completamente ajeno al pensamiento y lenguaje diarios.

A los números positivos y los negativos, y al 0, se les conoce como números enteros, que significa "*completos*", en contraste con las fracciones (que también pueden ser positivas y negativas).

Los números negativos constituyen una extraña cuadrilla. Son números que van hacia atrás, de forma que la cadena de los números enteros no tiene fin ni tampoco inicio. Es casi imposible relacionar los números negativos con la intuición y el sentido común. Tan recientemente (matemáticamente hablando) como hace 400 años, los números negativos eran considerados como algo absurdo por parte de los matemáticos más importantes.[45] Puede que resulte difícil asumir cómo un número (cero) significa nada, pero es todavía más difícil asumir cómo un número menor que cero puede significar una cantidad negativa, o cómo una cantidad "*negativa*" puede ser mayor o menor que otra.

Normalmente no se da razón alguna a la existencia de los números negativos; a los estudiantes simplemente se les dice que los números negativos existen y que deberían aprenderlos.

La forma más común de explicar los negativos en la enseñanza de las matemáticas es a través de la deuda financiera – las cantidades negativas significan lo que se debe en vez de lo que se posee. Si se intenta sacar una cantidad de otra cantidad más pequeña, uno se queda "*en números rojos*", con un número negativo. Si, por ejemplo, se tienen 6 euros y se gastan 8 (o si se mueven ocho números a la izquierda en la línea numérica), uno se queda con –2 euros ("*menos dos*" o "*dos negativos*").[46]

45.-Kline (1980, pp. 114-116, 118).

46.-A veces se usa una escala termométrica para explicar los números negativos y positivos. Pero la línea divisoria entre los números negativos y positivos para las temperaturas es arbitraria, dependiendo de dónde esté colocado el cero. Por ejemplo, las temperaturas que se representan con números negativos entre – 10 y 0 en la escala Celsius corresponden a los números positivos entre 0 y 32 en la escala Fahrenheit. – 4 grados no es el opuesto a + 4 grados, sea la escala que sea con la que trabajamos. Las temperaturas nunca son negativas (aunque a veces sean insoportables), solamente lo son los números.

Pero en el ejemplo de la deuda, estamos básicamente usando números positivos – sustrayendo un número positivo de otro, con una diferencia positiva entre ambos. No existe el euro negativo. Si se debe, es una cantidad de euros positiva. Y sustraer números negativos es otra cosa. Si se trata de deducir 6 negativo (- 6) de 3, el resultado matemático es 9, que significa que se termina con más de lo que se empieza. Esto tiene sentido sólo matemáticamente, pero no en otra manera.

Para calcular 3 – (- 6), como en el ejemplo anterior, es necesario emplear la rara pero familiar regla de que dos negativos hacen un positivo (aunque dos errores, no hacen un acierto), que todos hemos aprendido – quizás sin apenas comprenderlo – en la escuela.

El concepto matemático de los números negativos se complica cuando se mezclan positivos con negativos, y negativos con negativos.

Sustraigamos un negativo de un positivo y el resultado (como hemos visto) es un positivo aún más mayor: 3 – (- 6) = 9. Sustraigamos un negativo de otro negativo y el resultado es un número mayor que puede ser positivo, negativo o cero; por ejemplo (-3) – (-6) = 3; (-4) – (- 2) = - 2 y (-4) – (-4) = 0

Y el asunto es del todo de locos (conceptual, no matemáticamente) con la multiplicación y la división. Si multiplicamos dos números positivos, el resultado – bastante lógico – es otro número positivo: 3 x 6 = 18. Pero si multiplicamos dos negativos, el resultado también es positivo (-3) x (-6) = 18. Solamente se obtiene un número negativo cuando uno de los números que se multiplican es negativo, y en ese caso no importa cuál de los dos sea: (-3) x 6 = - 18 y 3 x (-6) = -18.

Si dividimos un número negativo por otro número negativo, el resultado es positivo: (-6) ∏ (-3) = 2. Pero cuando una de las dos cantidades es positiva y la otra negativa, el resultado es negativo: (-6) ∏ 3 = - 2 y 6 ∏ (-3) = - 2. Nada de esto se puede explicar con demostraciones que no sean matemáticas; se puede aprender si acaso como regla, y comprenderse solamente con las matemáticas – si el que aprende no ha roto antes el muro de cristal.

Incluso en la terminología y la notación matemáticas, existen ambigüedades y confusiones alrededor de la negación. La palabra "*menos*" y el signo – se emplean como verbos para la operación de sustracción y a veces también como adjetivos para designar una cantidad negativa[47] ("*menos tres*" y –3). Esta es la razón por la que coloco paréntesis en los números en algunas de mis anteriores discusiones, esperando que (4) y (-4) sean algo más claros que 4 y –4.

Es solamente debido a que existen los números negativos por lo que nos referimos a los números de contar, los números que normalmente usamos, como números "*positivos*" (Lastima los estudiantes inquisitivos que preguntan por qué algunos números son positivos; la única respuesta es que sirven para distinguirlos de los negativos intrusos). Debido a la confusión que los números negativos pueden causar, a veces es necesario denotar claramente los números positivos – no simplemente como 4, sino como +4 – por lo que se hace imprescindible escribir cosas como 4 + (+4). En otras ocasiones el signo + se debe dar por entendido, de modo que debemos pensar que 2+2=4 es "*realmente*" (+2) + (+2) = (+4).

Los negativos se comportan de forma sorprendente y a veces incontrolable. Probablemente hayan causado más dolores de cabeza a los aprendices de las matemáticas, y también a los expertos, de lo que lo ha hecho cualquier otra forma matemática. No se puede decir si un número positivo es el resultado de la multiplicación de dos positivos o de dos negativos, cosa que puede ser confusa e inconveniente. ¿Por qué no se obtiene otra cosa que no sea un número positivo cuando dos negativos se multiplican o se dividen? Porque no existe razón matemática para que así sea.

Tal vez lo más sorprendente es que a pesar de la confusión que causan los negativos, y su indudable utilidad, debería considerarse muy importante enseñarlos en toda su complejidad. No puedo imaginar que muchas personas se conviertan en matemáticos debido a su fascinación por los negativos, sin importarles lo negativas que pueden ser sus visiones sobre la educación y el mundo en general.

47.-Las formas verbales y adjetivales tienen historias diferentes. La idea de los números negativos, con todas sus dificultades, tiene al menos 2000 años, pero según mi diccionario, el primer uso de – como el signo de la sustracción apareció en 1673.

¿EXISTIERON ALGUNA VEZ LAS MATEMÁTICAS SIN LÁGRIMAS?

Las historias de las matemáticas tienden a hacer que el desarrollo de nuestras ideas básicas sobre los números suene a algo gracioso y poco complicado. Imagino diferentes escenarios.

Imagino a un antiguo pastor, o quien quiera que fuera, tratando desesperadamente de convencer a sus amigos de que una piedrecilla significaba una oveja mientras ellos meneaban la cabeza con tanta confusión como las mismas ovejas. Imagino al pastor tratando de señalar tres ovejas, mientras sus amigos se preguntaban si se refería a la oveja que siempre se quedaba en un rincón o a la que estaba coja de una pata. Imagino a los amigos que perdían la paciencia cuando el pastor señalaba a dos grupos de ovejas y defendía que uno era tres y el otro cuatro – hasta que una oveja vagara de un grupo a otro y los grupos se convirtieran en uno de dos y otro de cinco.

Imaginemos las primeras luchas al dar nombre a las piedrecillas individuales o a los dedos, entre personas que apenas sabían nombrarse unos a otros. Y una piedrecilla que se nombraba como "*uno*" en unas ocasiones y "*dos*", en otras. ¿Cómo se pudo apañar cualquiera para explicar que los números tenían que estar en el mismo orden, cuando el orden numérico por sí mismo era un concepto nebuloso y poco familiar? ¿Cuántos números tuvieron que ser inventados antes de que las personas adquirieran la idea de que la numeración podría continuar por siempre? ¿Tuvo el recuento que ir dando bandazos del dos al tres y al cuatro, tal vez a número por generación o por siglo, antes de que despegara como un cohete cuando las personas se dieran cuenta de que no había fin en el proceso, en cuyo punto surgiría otro grupo de problemas?

Observo enormes conflictos entre el grupo de personas que prefería contar con piedrecillas y el grupo de personas que pensaba que lo natural era hacerlo con muescas. Imagino los malentendidos y los conflictos entre los grupos que preferían contar con un sistema de base determinado en vez de con otro, o escribir con un sistema de colocación de los números en vez de con otro. Imagino a los entusiastas dispuestos a aniquilar o desterrar a los defensores de las prácticas numéricas "*anormales*". Imagino al clero intentado mantener los secretos numéricos para ellos solos, a los hombres de negocios intentando robar la tecnología sagrada para fines comerciales, y los burócratas intentando organizarse del mismo modo – y para colmo desafiándose. Ni siquiera puedo evitar contemplar los apuros de los profesores en aquellos matemáticamente tumultuosos tiempos, por no hablar de aquellas personas que pensaron que los números eran una indulgencia caprichosa e innecesaria que la economía no podía permitirse o quienes dijeron que simplemente no tenían cerebro para las matemáticas.

Y todo esto habría ocurrido durante siglos. Los primeros humanos no se tropezaron con los aspectos fundamentales del sistema numérico, del modo en que todo lo matemático está al alcance de la mano de forma conveniente en la actualidad. Se requería algo más que intuición e ingenuidad; habrían sido necesarias grandes cantidades de tacto, determinación, perseverancia, politiqueo, desesperación e incluso derramamiento de sangre.

Y cuando pienso en todo esto, más respeto al niño que resuelve "*lo básico*" en pocos años, "*ayudado*" por los adultos que creen que todo lo relacionado con los números es ante todo sencillo y evidente.

CAPÍTULO 7

Designar, ordenar y cuantificar

"*Número*" es una palabra con varios significados, no todos matemáticos. A veces la palabra se usa simplemente para referirse a una forma determinada, por ejemplo, un signo en un trozo de papel. En este sentido, son términos alternativos para los números, cuando nos estamos refiriendo únicamente a los signos, las palabras numerales y dígitos. Escribimos los numerales 1, 3 y 7 cuando queremos escribir el número 137.

Los signos tienen nombres familiares (como "*uno*", "*dos*", "*tres*", "*cuatro*") pero los nombres no significan nada más allá de lo que identifica el signo en sí. "*Cuatro*" en esas circunstancias significa el numeral 4 – cuando, por ejemplo, pido al pintor que ponga un "*cuatro*" en mi puerta o cuando voy a una ferretería y pido "*un cuatro y dos sietes, por favor*". Eso es todo.

Se han encontrado muchos usos para los números que no son matemáticos. El mundo físico está repleto de números que parece que estén haciendo algo matemático, pero que son extraños que han pasado de contrabando por la frontera para realizar un trabajo no matemático que bien podría hacerse por medios locales. Dichos números se usan como etiquetas de identificación y el único significado que tienen proviene de aquello con lo que vaya conectado. Igualmente podrían usarse letras del alfabeto.

DENOMINACIÓN

Los números que no se refieren a nada más que al objeto con el que van conectados se les llama categóricos – nombran una categoría o un ejemplo de categoría. Los numerales colocados normalmente en el dorsal de los uniformes de los atletas son números categóricos. El número de la camiseta de un jugador de jockey no nos dice nada excepto quién es el jugador. Si el número no nos dice nada más que quién es el jugador, es debido a algo que sabemos sobre el individuo, no sobre el número.

El uso "*propio*" de los números

En esencia, el número del dorsal de la camiseta de un atleta funciona como un nombre propio. Los gramáticos incluyen una categoría especial dentro del lenguaje para los "*nombres propios*" (como los nombres de las personas, los lugares y los barcos). Dudan de si los nombres propios deberían considerarse palabras, en el sentido lingüístico, porque no tienen significado alguno, no en el sentido de una definición. Es la razón por la que los nombres propios no aparecen en la mayoría de los diccionarios. No tiene sentido decir, "*¿Cómo definiríamos John F. Kennedy?*" John F. Kennedy se refiere a un personaje histórico (o a un barco o a una escuela o a un edificio público con el mismo nombre), y a nada más. Si digo que el nombre de mi amigo es Jorge Juan, no estoy diciendo nada de él salvo que se llama Jorge Juan.

Los gramáticos dicen que los nombres propios poseen referencias pero no tienen sentido. Denotan pero no connotan. Y así es como se comportan los numerales cuando se usan categóricamente. No tienen significado alguno más allá de la persona o el objeto con el que van conectados; tienen referencia pero no tienen sentido. Tal vez deberían llamarse "*números propios*", sin ser una parte más significativa dentro de las matemáticas como lo puedan ser los nombres propios en el lenguaje. La similitud de los números categóricos con otros tipos de números más significativos, como la similitud de los nombres propios con palabras más significativas, es solamente una coincidencia.

La inmensa mayoría de los números que nos rodean son categóricos o principalmente categóricos. Su familiaridad nos priva de reconocerlos por lo que son, números sin significado. No nos hace falta que los números usados categóricamente tengan ningún "*sentido numérico*".

Los números se colocan en los dorsales de los atletas para su mejor identificación porque los números son normalmente (aunque no siempre) más grandes y más fáciles de leer que los nombres. Las letras del alfabeto podrían igualmente servir, en realidad son más económicas. Los números del 1 al 9, solos o en pareja, distinguirán solamente 99 jugadores, mientras que las letras de la A a la Z, en sus distintas combinaciones, distinguirían 702 individuos. En contraste con los números, sin embargo, las letras pueden parecer que tienen significado si la combinación es EU, ES, OK o cualquier otra sugerente combinación.

No se puede hacer nada aritmético con los numerales usados de forma categórica – no se puede decir que el jugador número 36 es tres veces mejor que el jugador número 12 o que el equipo 4 tiene dos veces más jugadores que el equipo 2. Los números no se pueden combinar o comparar unos con otros; no tienen sentido matemático. Los números en el dorsal del jugador no significan lo mismo que los números en el marcador del campo.

Muchos de los números con los que nos encontramos en la vida diaria tienen función categórica o podrían tenerla: los números de los autobuses, las matrículas de los coches, las entradas de los espectáculos, los billetes de lotería y los libros en las bibliotecas. No podemos hacer nada matemático con ellos – no tiene sentido sumarlos o sacar su raíz cuadrada.

Los "*números seriales*" en los productos manufacturados son básicamente números categóricos de identificación; pueden significar algo para los fabricantes, pero para nadie más. Mi ordenador tiene el número de registro BX 4628; me pregunto si eso significa algo para el dueño del ordenador BX 4627, o si tiene alguna importancia el hecho de que mi ordenador sea mucho mejor que el BX 2314. Todo tiene hoy día un número de identificación, desde las radios a los microondas o los automóviles y los aviones – y por supuesto, las personas. Los individuos tienen número de la seguridad social, número del carné de identidad, número de la tarjeta de crédito y "*números de identificación personal*" para comunicarse con las máquinas en vez de con las personas. Ninguno de esos números tiene significado alguno, ni matemático ni de otro tipo.

ORDENAMIENTO

Sin embargo, a veces, se puede derivar significado de los números categóricos debido al modo sistemático en el que se emplean. Si estamos en la calle 42 y avanzamos un barrio y nos encontramos en la calle 43, es razonable suponer que nos dirigimos a la calle 44, incluso si hay calles intermedias con nombres en vez de con números y no nos permiten calcular exactamente cuántas calles nos separan de nuestro destino. Los números en los lomos de los libros de una biblioteca indican dónde están colocados en relación unos con otros en las estanterías, incluso si los números no son consecutivos. Si tenemos el número 47 en una cola, sabemos que vamos delante del que tenga el 56 pero detrás del que tenga el 32, incluso si alguno ha sacado más de un número o si otros han tirado el número y se han ido. Sabemos que alguien nacido en 1948 es mayor que otro que haya nacido en 1963, incluso si no calculamos los años que se llevan. Podemos sacar esas conclusiones porque estamos familiarizados con el orden numérico.

Ordenar los números

La razón por la que los números que funcionan categóricamente pueden conllevar un significado más allá de la simple identificación o la localización de un objeto es que se pueden localizar de forma consistente, en el orden de la cantinela de los números. Respetando el orden convencional de los números, podemos emplearlos de muchas maneras productivas. Los números están todavía redistribuidos categóricamente, pero se pueden usar para indicar una posición relativa en el tiempo y en el espacio. Se convierten en ordinales (con significado de "*ordenado*").

El orden numérico nos permite organizar y contrastar todo tipo de objetos y acontecimientos – podemos decir que algo es mayor que, menor que, o igual que algo, en edad, tamaño, peso, rango, altitud, proximidad en el tiempo, proximidad en el espacio, cantidad, cualidad y otros atributos que queramos considerar. La posibilidad de usar los números en este modo ordenado es una fuente enorme de poder, asequible porque podemos recitar, y construir sin fin, los números en un orden serial que prácticamente todo el mundo conoce y nadie discute. Podemos estar en contra del modo en que el orden numérico (o alfabético) se usa, pero nadie podrá jamás defender que el mundo sería mejor si el 7 viniera antes del 3 (o la M antes de la G en el alfabeto).

El orden numérico no se encuentra en el mundo físico, excepto cuando lo colocamos allí. No existe "*orden*" en el mundo natural porque no hay números en él. La noción de orden – con las ideas asociadas de "*mayor que*", "*menor que*" y "*igual que*" – proviene de nuestro fértil cerebro.

No existe forma alguna de que nadie nos diga qué es el orden; tenemos que entender el orden para entender su explicación. No existe modo alguno de que nadie nos muestre qué es el orden; sin una comprensión previa, la demostración es inútil. El orden no reside en los objetos, sino en las relaciones. No podemos mirar un árbol que está aislado y decir que tiene la propiedad de ser más alto, más verde o más cercano. Nada viene con un orden inherente, incluidos los números. Podemos aprender los números en el orden convencional en forma de cantinela numérica, pero la idea o el concepto de orden que asociamos con los números la tenemos que construir nosotros mismos. Proporcionamos el sentido del orden que permite a los números organizarse "*numéricamente*". Y a partir de la organización de los números, podemos crear organización en el resto de nuestro mundo.

Ya no adjudicamos los números a los objetos y los acontecimientos de forma arbitraria, como hacemos con el uso categórico de los números, pero si los ponemos en algún determinado tipo de orden. Estamos adjudicando objetos y acontecimientos a los números, a una estructura en nuestra propia mente. Los números, literalmente, mandan.

El uso creativo del orden numérico

El establecimiento de un orden invariable en el que decir los números y pensar en ellos puede parecer un logro modesto, pero facilita en gran medida la organización de nuestras vidas cotidianas. El uso ordinal de los números – aplicación sistemática sin cálculo – es inmenso en nuestra sociedad.

Aún así, el orden numérico ocupa con toda probabilidad un segundo puesto en nuestra vida (nótese la expresión ordinal) con respecto al orden alfabético, donde no existe claramente relación con cantidades. El orden es enormemente importante en culturas burocráticamente organizadas y ha hecho posible gran parte de la sociedad contemporánea. Imaginemos el caos de nuestras bibliotecas, diccionarios, enciclopedias, listines telefónicos, atlas y callejeros, sin mencionar las listas de direcciones y el censo de Hacienda sin un orden alfabético.

Pero está teniendo lugar una dramática revolución. El valor del orden alfabético y numérico está disminuyendo y pronto desaparecerá, en lo que respecta a los ordenadores. Las búsquedas electrónicas se pueden realizar con tal rapidez en las gigantescas bases de datos que no existe ventaja alguna en almacenar elementos individuales en orden alfabético o numérico.

Orden sin distancia ni dirección

Cuando se usan los números o las letras en su orden convencional y predecible, todo se puede colocar en un lugar del cual se puede sacar rápidamente. Pero los números ordinales no se pueden usar para el cálculo porque no tienen por qué ser consecutivos o empezar por un punto fijo. Cuando se saca un número en un supermercado, que te indica cuál es el turno en el que atenderán, no importa en qué número empieza la serie, solamente importa cuántas personas hay por delante. En una competición de patinaje sobre hielo la puntuación máxima es 6, pero nadie obtiene 0 a menos que lo descalifiquen o que no se presente a la prueba. No importa dónde empieza la numeración – puede ser 0 o 1 o cualquier otro número por debajo del máximo que es 6.

El hecho de que un número "*nada*" no haga falta en un orden numérico es una de las razones de la confusión y la controversia que durante siglos hubo antes de que se aceptara el cero en la comunidad matemática. Raramente alguien empieza a contar desde 0 si se le pide que cuente hasta cinco o hasta diez.

No es necesario que los números que se usan ordinalmente "*partan*" del 1 (o del 0) hasta el 10, o hasta otro máximo. Los números igualmente podrían ir hacia "*atrás*" – el orden es igual de fiable. No existe dirección lógica en la que los ordinales deban ir. Muchos juegos cuentan "*hacia atrás*" (como los dardos, que normalmente van desde el 501 o el 301 hasta el 0). La "*cuenta atrás*" en el despegue de una nave espacial usa los números en el orden inverso. Podemos decir que algunos números son "*más grandes*" o más "*altos*" que otros, que el 17 es "*más alto*" que el 14, pero esto es simplemente un modo convencional de hablar de los números. Cuando los números se usan con fines ordinales, más alto no significa necesariamente que tenga prioridad o un valor mayor. Intentemos decir a alguien que es "*número uno*" en un acontecimiento deportivo que ese número es menor que 2 o 3.

En ocasiones no todos los números que se encuentran en los extremos de una secuencia son útiles. Puede que haya cierto vacío arbitrario, por ejemplo, en el marcador del tenis, donde los "*puntos*" saltan del 0 ("*nada*") a 15, 30 y 40 y después, si fuera necesario, se van repitiendo los juegos. En el Bridge, los puntos de las bazas son múltiplos de 10, que comienzan en 20, y avanza con varias gratificaciones o penalizaciones y puntuaciones múltiplos de 50, con lo que se pueden conseguir resultados de miles de puntos. Otros deportes y juegos de cartas funcionan con puntuaciones crecientes (o decrecientes), pero arbitrarias en cualquier caso. Algunas competiciones (como el boxeo, el buceo o la gimnasia) otorgan puntuaciones en forma de fracciones decimales.

CUANTIFICACIÓN

Se puede pensar en el sistema numérico como en una cadena con un número infinito de eslabones, un rosario de perlas sin fin, o una sucesión ilimitada de ladrillos o de piedrecillas, o cualquier otra forma metafórica, pero ninguna de estas descripciones se debería tomar en sentido literal. Una cadena real o una secuencia de perlas o ladrillos no podría por sí misma constituir un sistema numérico. Una perla (o un ladrillo) en un lugar no podría jamás sustituir a otra en otro lugar, y ese no es el caso de los números. Tenemos que hablar de los números metafóricamente porque no tienen existencia tangible. Infundimos números a los objetos (o a los sonidos o a las unidades de medida) cuando los relacionamos con la idea de numeridad, al igual que le infundimos orden. Y todo por dos razones:

1. porque cada número entero es exactamente uno más que el anterior, y
2. porque nosotros (a veces) colocamos nuestro sistema numérico en el mundo y los elementos que incluimos se fusionan con las propiedades relacionales de los números.

Hacemos que dos lápices y tres lápices equivalgan a cinco lápices.

La relación fundamental entre números

Una diferencia crucial entre el alfabeto y el sistema numérico es que mientras las letras del alfabeto no se relacionan esencialmente unas con otras – no importaría que estuvieran reorganizadas en diferente orden, excepto que confundirían lo que hemos organizado alfabéticamente – los números están sujetos a un patrón inmutable de relaciones. Esto incluye los números que ni siquiera hemos usado, ni pensado.

No podríamos contar "*uno, dos, tres, cinco, cuatro*" de la misma forma que diríamos " *A, B, C, E, D*" – no sin cambiar el significado de "*cinco*" y "*cuatro*" de manera que "*cinco*" significara todo lo que ahora significa "*cuatro*" y "*cuatro*" ocupara el lugar que ahora ocupa "*cinco*". Eso es porque existe un conjunto cerrado de relaciones entre los números que no existe entre las letras del alfabeto.

Cada número[48] es exactamente uno más que el anterior. Esto no es cuestión de espacio, aunque con frecuencia se consideran los números como si fueran segmentos equidistantes en una línea, por ejemplo cuando decimos que seis se encuentra en la mitad entre cuatro y ocho. Esto, una vez más, es una metáfora. La distancia entre números existe solamente en términos de los números. Seis está a mitad de camino entre cuatro y ocho matemáticamente hablando; no importaría si los numerales fueran físicamente de tamaños distintos y se encontraran físicamente a diferentes distancias, como:

4   6   8

Cada número entero es mayor que el número que le precede, y por lo tanto menor que el número que le sigue. Esto es una simple cuestión de lenguaje. Pero para ser precisos (y matemáticos), cada número es exactamente uno mayor que el que le precede y exactamente uno menor que el que le sigue. Todas las demás propiedades de los números y de las matemáticas parten de esta relación fundamental. Puesto que tres es uno más que dos, y cuatro uno más que tres, cuatro tiene que ser dos más que dos – en realidad, cuatro es "d*os veces*" dos. Cada número conoce su lugar preciso. En cuanto hacemos esta progresión de un número preciso al siguiente, cada paso es exactamente uno. En ese momento estamos en la otra parte del muro de cristal. Nos encontramos en el mundo de las matemáticas.

¿Por qué cada elemento de la secuencia numérica es siempre "*uno*" más que su predecesor y uno menos que su antecesor?¿Por qué es "*uno*", de forma que tres es exactamente un "*uno*" más que dos y cuatro es dos "*unos*" más que dos, todos tan bien interrelacionados e interminablemente predecibles? La respuesta siempre es la fundamental distinción cognitiva y natural del singular que hace el lenguaje. Mientras que el plural – por definición – puede ser algo más que uno, el singular – igualmente por definición – es un todo, una unidad, un elemento una entidad por sí mismo; es literalmente "*singular*". Nada puede ser menos que uno y continuar siendo entero. Nada puede ser menos que uno y continuar siendo singular. En palabras de una canción popular, "*uno es uno y solamente uno y siempre será así*". Al convertir la pluralidad en una sucesión ordenada de singularidades, creamos el número.

48.-Estoy hablando de los números "*enteros*" aquí. Este punto se aclarará más adelante

Los números enteros son una sucesión interminable de "*unos*", cada uno con su nombre propio y con su lugar ordenado y legítimo. La progresión sin fin se basa en esa distinción, una progresión que está llena de relaciones útiles, inesperadas y bellas.

No encontramos números en el mundo físico. Tenemos que colocarlos allí. Pero los números tampoco están en nuestra mente (a menos que los recitemos para nosotros mismo o hagamos "*cálculo mental*", que no es más "*mental*" que la aritmética hecha en el papel, excepto porque la realizamos en silencio para nosotros mismos). El número es una idea sin realizar en nuestras mentes hasta que se manifiesta en la forma básica de la secuencia numérica, que se convierte así en un material manipulable del mismo modo en que un carpintero manipula la madera.

La manipulación de números que podemos realizar en nuestra mente está limitada. Existe una determinada memoria y un "*espacio de computación*" disponibles para el cerebro y solamente los cálculos más simples se pueden hacer en el lenguaje hablado, en voz alta o en silencio. Pero con la ayuda de sistemas notacionales – la representación visual de los números y su manipulación – se pueden llevar a cabo cálculos matemáticos de enorme complejidad (en ocasiones más allá de la duración de la vida de cualquier persona), tanto en papel como con el ordenador. Los sistemas notacionales, que tienen su historia antes de la invención de cualquier otra forma de lenguaje escrito, nos permiten hacer cosas con la secuencia numérica, pero no hacen posible la secuencia numérica en primer lugar. Lo que da vida a la secuencia numérica, y a sus infinitas posibilidades, es la cantinela infantil.

Contar (con un propósito)

Algunos de los significados del verbo contar son claramente metafóricos, por ejemplo, cuando decimos que determinadas personas "*cuentan*" porque son miembros importantes o influyentes de una comunidad o grupo. Decimos que podemos contar con alguien o que esa falta no cuenta o que no podemos contar con buen tiempo mañana. Otro de los significados de contar, ya discutido, es reproducir la cantinela numérica. Decimos que enseñamos a los niños a "*contar*" cuando les enseñamos a recitar las palabras numéricas, hasta el diez o el doce o el veinte. Les enseñamos algo más sobre contar cuando les enseñamos las reglas combinatorias – cómo "*veintiuno*" y "*veintidós*" siguen a "*veinte*", y cómo "*treinta y uno*" y "*treinta y dos*" siguen a treinta. Los niños pueden aprender a decir estas palabras sin conferirles significado alguno. La palabra "*contar*" se usa, en este sentido, esencialmente falta de significado, como cuando a veces se nos pide "*contar hacia atrás*" o hasta cien mientras los demás se esconden. No hay nada matemático en estas actividades.

Pero el verbo "*contar*" es además transitivo; contamos cosas. En vez de simplemente decir, "*uno, dos, tres...*", podemos contar "*un dedo, dos dedos, tres dedos...*" o "*un lápiz, dos lápices, tres lápices...*" podemos calcular, contar (en un sentido numérico), totalizar y cuantificar. Podemos la secuencia numérica en objetos del mundo de una forma significativa, incluso antes de implicarnos en cualquier cálculo matemático. Esto se hace usando un número como adjetivo en vez de cómo nombre o como pronombre. Pero un número es muy diferente de cualquier otro adjetivo. Decir que hay cinco manzanas es muy diferente a decir que hay manzanas verdes. La calidad de cinco no es una propiedad de las manzanas de la misma forma que lo es su calidad de verde o incluso su peso o su sabor. Ninguna de esas cosas cambia si añades más manzanas al grupo.

Al decir que hay cinco manzanas, las manzanas quedan impregnadas de la calidad de cinco. Asimilan todas las propiedades de cinco (por eso la gente piensa que es obvio que cinco manzanas muestran el número cinco). Decir que hay cinco manzanas significa que tienen las mismas propiedades, numéricamente hablando, que el número cinco, que una más harán seis y que dos más, harán siete.

Contar de este modo supone un acto complejo, que implica:

• saber – o ser capaz de construir – la secuencia numérica, al menos hasta el número de objetos que se deben contar,

• Comprender que los números sucesivos se deben asignar una y solamente una vez a cada uno de los objetos que se deben contar,

• Comprender que el orden en el que los objetos son numerados es irrelevante, aunque el orden de los números en sí debe respetarse

• Y finalmente, comprender que el total de objetos (en sí mismo un concepto complejo) se indica por el último número usado en la secuencia de recuento.

Por complicado que pueda ser, y aunque los niños normalmente aprenden a recitar de memorieta la cantinela numérica antes de ser capaces de hacer otra cosa, a veces demuestran que comprenden las complejidades de contar antes de haber aprendido por completo la cantinela numérica. Pueden "*contar*" un grupo de objetos que tengan frente a ellos con una secuencia tal que

Uno, dos, cinco, siete, tres

Terminando tal vez con algo como "*veinte doce*" e incluso atreviéndose a decir que el número total de objetos es "*veinte doce*" o cualquiera que sea el enorme número que han dicho. Respetan, aunque no lo entiendan bien, el principio de "*cardinalidad*".

La noción de "*cuántos*" no es fácil de asumir. "*Más*" es más fácil. Los niños cuando comienzan a usar los números – cuando se dan cuenta de que algunos números son más "*largos*" que otros – normalmente "*cuentan*" bastante erráticamente. Cualquier número por encima de dos o tres se convierte en cuatro o en siete o en cualquier otro número arbitrario. Contar es literalmente "*uno, dos, un montón...*". Los niños han relacionado la idea de cantidad con los números, pero no de un modo preciso. Pero contar es muy complicado – un considerable logro intelectual que costó miles de años a la humanidad dominar.

Numeridad

Contar en el sentido de totalizar o cuantificar requiere un nuevo concepto – el de numeridad o cantidad – que no se puede entender si no se explica o se demuestra. Al usar nuestra cadena de números, podemos decir que hay "*cinco*" personas o "*siete*" personas en un grupo y que un grupo de siete personas es "*más que*" un grupo de cinco. ¿Pero qué significan esos números? el número cinco no significa un grupo o total de cinco personas o cinco objetos o cualquier otra cosa en el mundo. Los totales no existen en el mundo. Son una vez más producto de nuestro cerebro.[49]

Todo número tiene, por supuesto, un significado matemático. O para ser precisos, muchos significados matemáticos, siempre que el número no se esté usando categóricamente. Diez significa dos veces cinco o nueve más uno u once menos uno, etc. pero psicológicamente, el significado de los números es limitado. Solamente los primeros números tienen algún significado específico; después de eso, el único significado que los números tienen fuera de las matemáticas es su uso para designar mayores o menores cantidades de "*más*".

Existen indicativos de la discontinuidad cognitiva sustancial por encima de cuatro, cuando los números abandonan el mundo de la experiencia perceptiva y funcionan solamente en el mundo de las matemáticas. Por ejemplo, los niños a los tres años pueden ser capaces de recitar la cantinela numéri-

49.- Se han llevado a cabo innumerables investigaciones sobre el recuento de los niños y su comprensión sobre lo que están haciendo. Dos eruditos cuyos primeros informes continúan siendo influyentes en este campo son GELMAN y GALLISTEL (1978). Véase además GELMAN (1979).

50.- COLMES y MORRISON (1979).

51.- CAREY (1978).

52.- CROMER (1971, citado en HOLMES y MORRISON, 1979, p. 212). Holmes y Morrison observan que mientras que los niños luchar por darle sentido al tiempo, no tienen la misma dificultad con el espacio. Aprenden con rapidez la consistencia de los objetos y cómo intermediar sus cuerpos entre ellos. El sentido visual de la perspectiva ya está construido ca hasta diez o más en el orden convencional, pero no pueden contar más de dos o tres objetos sin confundirse.[50]

Incluso a los cinco años, cuando son capaces de contar hasta 20 o más (recitando), es posible que a los niños les resulte difícil contar objetos si son más de cuatro. Su comprensión se confina al mundo familiar de objetos y acontecimientos, y no han cruzado el umbral al mundo de las matemáticas.

La dificultad que los niños pueden experimentar al entrar en el mundo de las matemáticas es particularmente notable en contraste con su competencia con el lenguaje. A los seis años, los niños pueden ser capaces de usar y comprender 14.000 palabras.[51] Pero la competencia lingüística que han adquirido no es general. La dificultad persiste con las palabras que se refieren a formas de ver el mundo que todavía no comprenden del todo, por ejemplo, con el tiempo; no con el tiempo del reloj o del calendario, sino con los conceptos como pronto, en breve, nunca, siempre y a veces.[52] (Aún así se supone que deben comprender los horarios).

Un límite a la imaginación

Tendemos a pensar que los números usados como totales son significativos porque nos dicen cosas sobre el mundo. Valoramos diez euros más que cinco euros porque sabemos que diez euros son "*más*". Pero la falta de sentido proviene de la forma en que entendemos los números; avanza desde la mente al mundo, no del mundo a la mente. Como ya he descrito en el capítulo 4, es imposible ver, o imaginar, más de cuatro o cinco de algo, en sentido numérico. Podemos imaginar grupos más grandes, por supuesto, y podemos imaginar, grosso modo, el tamaño aproximado de los grupos más grandes, pero no podemos pensar en su cantidad real sin usar las relaciones matemáticas.

Los números no son como los sonidos, donde podemos oír que un sonido es más alto que otro, o de tono más alto o de diferente timbre. No son como los colores o la temperatura o el peso o el tamaño, donde los sentidos nos dicen que determinada cosa es más que otra cosa. La numeridad es totalmente abstracta.

El poder que adquirimos al emplear los números es interminable – incluso si nunca terminamos de comprender los números con los que terminamos. Las matemáticas nos ayudan a crear un mundo físico que de otra forma no existiría. Siempre disponemos de un carrete de números para enrollarlo y desenrollarlo, no solamente para contar, sino para computar. Podemos añadir y sustraer, multiplicar y dividir, y podemos procesar números de formas aparentemente infinitas. Podemos calcular y medir.

CAPÍTULO 8

Calcular y medir

Una vez que el sistema numérico funcional estuvo en su sitio en el habla y en la escritura, las personas pudieron comparar magnitudes, un logro intelectual más allá de lo que el lenguaje podía conseguir. Por ejemplo, podían comparar si el total de ovejas, de barcos o de cocos que ese día tenían era mayor o menor (o igual) que el total que tenían el día anterior, o el que pensaban que tendrían al día siguiente, y mayor o menor (o igual) que el total que otra persona poseía. Los totales eran matemáticos; estaban en forma de números, y podían ser exactos e indisputables. Pero las comparaciones continuaban siendo no matemáticas – "*mayor*" o "*menor*" son palabras y conceptos del lenguaje diario y no términos matemáticos precisos (en estos casos). Podemos decir que nueve es mayor que seis del mismo modo que podemos decir que un temporal es más que una ligera brisa; es información poco exacta.

Pero las personas aprendieron a hacer cosas con números que posibilitaron que las comparaciones de totales fueran matemáticas y precisas. Aprendieron a calcular. En vez de decir simplemente que nueve es mayor que seis, pusieron nombre a la diferencia y computaron que nueve es precisamente tres más que seis. Podían hacerlo sin tener que contar. Podían además calcular que nueve y seis hacen un total de quince, una vez más sin necesidad de contar. Este razonamiento hizo que el recuento se instalara en el mundo de las matemáticas.

CÁLCULO

El cálculo despega cuando el recuento se detiene, ascendiendo a ámbitos jamás soñados fuera de las matemáticas. El sistema numérico, por su esencial simplicidad, es extraordinariamente productivo. En primer lugar permite contar, a continuación calcular y finalmente calcular de forma que el recuento no sea ya necesario.

El cálculo es todo lo que se puede hacer con los números sin necesidad de contar. Incluso permite hacer cosas con números imposibles de hacer con el recuento, tanto porque el recuento sobrepasaría el tiempo o las destrezas disponibles o porque no se podría disponer – por medio del recuento – de algunos de los números necesarios. Si los números equivalen a las notas en una escala musical interminable, el cálculo equivaldría a las posibilidades interminables de óperas, ballet y sinfonías.

¿Qué hace que el cálculo sea no solamente posible, sino preciso, fiable e infinitamente productivo? La respuesta es la exploración de las formas en las que los números se relacionan unos con otros. Los números están fuertemente amarrados a una red infinita de relaciones que solamente existen entre ellos. Son como los nudos de una red de pescar. Sin la red, los nudos no podrían existir y sin los nudos, la red tampoco existiría. Cada uno de los nudos está incontestablemente unido a los demás nudos de la red.

Cada uno de los números se relaciona con los demás, potencialmente o de facto, de innumerables formas. Y esas relaciones son eternas. Nada podría ser más intuitivamente atrayente que las relaciones que los números tienen unos con otros porque reflejan a la perfección las tres características básicas – las tres C – que todo ser humano espera encontrar en un mundo estable. Los números son consistentes porque 9+6=15, no importa dónde y cuándo se haga el cálculo. Son coherentes porque ningún otro cálculo u organización de números puede afectar al hecho de que 9+6=15. Y existe consenso porque nadie puede argüir que para él personalmente 9+6 no es igual a 15. Los números y los cálculos puede que no siempre se organicen claramente en el mundo físico o demuestren coherencia, consistencia y consenso cuando se colocan en ese mundo, pero eso se debe siempre a lo indeterminado del mundo. Los números son siempre fiables, aunque puede que los usos que se les dan no lo sean.

Normalmente las matemáticas se enseñan mostrando a los que las aprenden qué se puede hacer con los números, en vez de ayudarles a descubrir el sistema numérico en sí; se coloca el carro delante de los bueyes. La demostración de que dos de algo y tres de algo son cinco de algo no significa nada sin la comprensión de que cinco es el valor inevitable[53] de la relación matemática 2+3. Los que se están iniciando pueden aprender a realizar de memoria unos cuantos rituales matemáticos básicos, pero no tendrán significado matemático alguno.

Relaciones y "operaciones"

Sin relaciones, las parejas de números no tienen significado alguno. Su único significado se encuentra en sus relaciones. Que yo tenga nueve euros y tu tengas seis no significa nada más que yo tengo más que tu; son dos fragmentos de información sin relacionar. Lo que los números significan es cómo se relacionan, entre ellos y con respecto a los demás números. El "*significado*" compartido de los nueve euros que es el total que yo tengo y los seis que son los que tienes tu depende de cómo se relacionen.

Si combinamos el 9 y el 6, que es la relación señalada con el signo más (+), el significado compartido es 15. Si estamos interesados en la diferencia matemática entre 9 y 6, que es la relación señalada con el signo menos (-), su significado compartido es 3. El significado de los 15 euros si queremos comprar algo que cuesta 17 euros es que nos faltan 2 euros. El significado de los dos números es otro número.

Las distintas formas de establecer relaciones entre números y de hacer cálculos se llaman comúnmente "*operaciones*", como el cuarteto básico que todo el mundo conoce – suma, resta, multiplicación y división. Pero la palabra operación además puede mitificarse por parte de los que aprenden. "*Operación*" (u operador) tiene un significado distinto en el lenguaje matemático al que puede sugerir el lenguaje natural.

La suma, por ejemplo, no es una operación en el sentido de hacer algo a alguien. No le estamos haciendo nada a los números cuando decimos que dos y dos son cuatro, no más que lo que estamos haciendo a Paris y a Francia cuando decimos que Paris es la capital de Francia. Estamos simplemente expresando un hecho. Nada se le ha hecho a nada.

53.-Para la consistencia en este capitulo, me refiero a un enunciado completamente matemático (como 9+6) como la expresión de la relación. En el lenguaje diario, esa expresión se escribiría "*nueve más seis*" o "*nueve y seis*" o "*nueve sumado a seis*". Y a lo que en el lenguaje diario uno puede referirse como la "*suma*", el "*resultado*" o incluso la "*respuesta*" – todos términos confusos hasta cierto punto – yo me refiero con la palabra neutral "*valor*". El valor matemático de nueve más seis es quince. La palabra "*valor*" también quiere decir "*significado*" – el significado matemático de nueve más seis es quince. Cuando las matemáticas se escriben, el valor se indica con el signo "=", normalmente leído como "*igual a*" "*es*" o "*hace*". El cálculo es la determinación del valor de una expresión matemática.

LA INTERMINABLE RELACIÓN SIGNIFICATIVA DE LOS NÚMEROS

A lo largo de este libro describo la relación fundamental que subyace en el centro del sistema numérico – el hecho de que uno más que uno se llame dos, uno más de dos se llame tres, uno más de tres se llame cuatro, etc. La relación "*uno más que el número anterior*" reinicia el sistema numérico, lo mantiene funcionando y se asegura de que potencialmente no tenga fin. El recuento puede durar por siempre.

Pero con el recuento interminable vienen parejas otras interminables relaciones, empezando por el hecho de que podemos contar (y calcular) el número de números entre un número y otro. Dieciséis es uno más que 15, pero además es dos más que 14 y diez más que 6, etc. Además, dieciséis es cuatro menos que 20 y 1000 menos que 1016. Si contamos dos veces 16 tendremos un total de 32 números. Si contamos solamente la mitad de 16, tendremos 8. Esto son verdades perdurables.

Algunas de las relaciones más elementales se expresan con los signos familiares de los "*operadores*" matemáticos:

Relación	Valor	Nombre matemático
16 + 2 =	18	Suma
16 - 2 =	14	Resta
16 x 2 =	32	Multiplicación
16 ÷ 2 =	8	División

Y las menos familiares

16^2 =	256	Exponente (en este caso, cuadrado)
$\sqrt{16}$ =	4	Raíz (en este caso, cuadrada)

y muchísimas más.

Hay también infinidad de maneras en las que diferentes combinaciones de números pueden tener el mismo valor matemático, por ejemplo

16 = 14 + 2 (y también 13 + 3, 12 + 4...)
16 = 18 - 2 (y también 19 - 3, 20 - 4...)
16 = 8 x 2 (y también 4 x 4, 2 x 8...)
16 = 32 ÷ 2 (y también 48 ÷ 3, 64 ÷ 4...)
16 = 42 (y también 24...)
16 = ÷256 (y también 3÷4096, 4÷65.536...)

además, en virtud del hecho de que son todos equivalentes a 16, podemos decir que (14+2), 818-2), (32 ÷ 2), (42) y ÷256 son todos equivalentes entre sí, y además equivalentes a (13 + 3), (19 - 3), (4 x 4), (48 ÷ 3), (24), (3÷4096) y así interminablemente. No existe límite alguno para las relaciones entre los números. En cuanto a variedad y fiabilidad, no existe nada comparable sobre la tierra.

Significados matemáticos

Discutí en el capítulo 3 cómo "*sumar*", "*restar*", "*multiplicar*", "*dividir*" e "*igual*" no significan lo mismo en las situaciones diarias como en las matemáticas, y que las palabras y frases usadas

54.-La palabra menos frecuente agregación sería más precisa que combinación, porque esta última puede sugerir "*separados pero juntos*", mientras que el efecto matemático de la suma (y de la multiplicación) es conseguir un todo más largo a partir de varios todos más pequeños.

para explicar estos términos técnicos no reflejan lo que sucede en las matemáticas.

Matemáticamente, como ya he sugerido, la suma puede considerarse como una dirección hacia un punto determinado en el espacio numérico, representando la combinación[54] de dos magnitudes. Muchos niños parecen intuirlo antes de haber dominado las tablas de "*sumar*". Si se les pide que sumen cuatro y tres, comienzan a "*contar hacia adelante*" los tres siguientes números con los dedos – "*cinco*", "*seis*", "*siete*". No encuentran la respuesta en sus dedos; los usan para que les ayuden a llegar al número que están buscando. Los dedos son un atajo al número, que no es lo mismo que oír decir que tres lápices y dos lápices son cinco lápices. El recuento hacia delante consigue sus fines en el mundo de los números – al menos por un corto tiempo. A la larga, puede confundir mucho, como veremos en el capítulo 13.

Matemáticamente hablando, la palabra multiplicar señala una relación particular entre números. El valor de esta relación es el número que se puede alcanzar combinando[55] magnitudes numéricas del mismo tamaño. Así, el valor de 7 x 4 es el número que se alcanzaría si se combinaran siete magnitudes de cuatro (o cuatro magnitudes de siete), que supondría cierto esfuerzo hacerlo contando. El valor de 438 x 897 es el número que se conseguirá combinando 438 magnitudes de 897. Por supuesto, nadie querría jamás hacer esto contando, porque las matemáticas proporcionan caminos más fáciles para calcular el valor de los números en la relación de multiplicación.

Matemáticamente, el valor de 5 - 2 (resta) es la distancia entre las magnitudes 5 y 2. La distancia numérica se puede determinar contando hacia delante (otra estrategia ocasional para los niños) de 2 a 5, o hacia atrás de 5 a 2., pero solamente con números enteros relativamente pequeños. No hay "*resta*" alguna. El hecho de que 5 - 2 = 3 es simplemente una alternativa a decir que 2 + 3 = 5. No ha cambiado nada, excepto el punto de vista, la relación concreta en la que nos centramos.

¿Y cuál es la relación de la división? La expresión 18 ÷ 3 = 6 tal vez se pueda ver mejor como otra forma de considerar la relación 6 x 3 = 18, un complemento más que un opuesto. En la red de números, el seis es la magnitud que combinarías tres veces para alcanzar 18 (y tres es el número que combinarías seis veces para conseguir el mismo valor). La división no es la inversa de nada. Es simplemente otra relación. Es la partición de una magnitud en un número (no necesariamente un número entero) de magnitudes más pequeñas de igual tamaño.

Finalmente, el signo igual (=) alude a un medio alternativo de afirmar un valor o una expresión. La expresión 9 + 6 = 15 significa que 15 es el valor de 9 + 6 la expresión 9 + 6 = 10 + 5 significa que 9 + 6 tiene el mismo valor que 10 + 5; las dos partes de la ecuación son siempre equivalentes y sustituibles una por otra en un contexto matemático.

Las diferencias entre el significado de las palabras en el lenguaje matemático y en el lenguaje natural no suponen que los significados matemáticos no sean susceptibles de ser aprendidos. Los significados matemáticos se pueden comprender, pero solamente en el mundo de las matemáticas, que es a donde pertenecen. La forma en que las "*operaciones*" o las relaciones matemáticas se discuten en el lenguaje cotidiano son solamente una aproximación metafórica tosca a la situación matemática, y al igual que todas las metáforas se puede entender solamente si el receptor está familiarizado con la alusión. Para alguien que no sepa de matemáticas, la metáfora puede confundir más que ayudar.

Los niños (y los mayores) pueden incluso aprender a realizar los rituales de las tareas matemáticas simples sin entender en el plano matemático lo que están haciendo. Pero sin intuición, pronto se darán de bruces contra el muro de cristal y se frustrarán e impacientarán.

MEDICIÓN

El sistema numérico es extraordinariamente versátil y útil, pero solamente hay una cosa para lo que es útil cuando se usa en el mundo físico, y es el recuento.

55.- Ver la nota anterior.

Sin el recuento, no se puede realizar nada útil con el sistema numérico más allá de la simple identificación o categorización. Los números por sí solos no se pueden usar para medir, registrar, comparar o predecir. Las personas que querían hacer algo práctico con el sistema numérico – con las matemáticas – tenían que contar. Y para contar, es necesario algo contable. Se necesitan las unidades.

A veces las unidades pueden ser bastante abstractas. Los números en sí son las últimas unidades. Cuando se dice que cuatro más seis equivale a diez, se está diciendo (en efecto) que cuatro unidades y seis unidades hacen diez unidades. ¿Unidades de qué? Unidades de número. Magnitudes. Pero los cálculos normalmente no se hacen en abstracto, simplemente como un juego de números, excepto por parte de esas dos categorías peculiares de individuos que son los matemáticos profesionales y los desventurados niños. Normalmente tienen que ver con determinados aspectos del mundo a los que se les quieren aplicar el poder y la conveniencia de las matemáticas. Y cuando esto ocurrió en el pasado, fue necesario encontrar – o inventar – las unidades autónomas y contables de modo inequívoco. Cada unidad individual tenía que distinguirse y poderse separar claramente de las demás unidades. En efecto, se colocaron una serie de números sobre una serie de objetos contables, se emparejaron uno a uno, de forma que se pudieran llevar a cabo los cálculos con los números como si se hiciera con los objetos a los que se les habían asignado los números.

Con frecuencia, las unidades contables son tan obvias que las damos por sabidas. Si estamos contando cabezas, ovejas o euros, entonces son éstas – muy evidentes – las unidades que estamos contando. No le otorgamos a la unidad en sí un segundo pensamiento. Las unidades y los números son tratados como uno.

Pero a veces una unidad no es tan evidente; no existe en la naturaleza de donde queremos aplicar las matemáticas. Y en ese caso, es necesario inventar una unidad. Tenemos que construir algo que podamos contar. Necesitamos una medida. La mayoría de los logros humanos que implican a las matemáticas, desde la compra y venta hasta la más compleja ingeniería, no habrían sido posibles sin la invención de las unidades (o medidas) que pudieran contarse.

Y la invención de las unidades contables ha sido difícil y ha requerido no solo de la inventiva, sino de la aceptación y el acuerdo comunitarios. En muchos casos las unidades fiables y prácticas continúan escapándosenos, como en la búsqueda de la medida de la belleza, la excelencia, la inteligencia y el valor humanos.

"Dividir" el espacio y el tiempo

El espacio y el tiempo no se nos presentan en unidades manejables, ordenadamente preempaquetadas para nuestra comodidad matemática. El espacio y el tiempo están tan libres de límites naturales como lo está la superficie del océano. Las unidades que nos resultan tan obvias ahora, como las pulgadas, las yardas o las millas (o los centímetros, los metros o los kilómetros), y los minutos, los días y los años tuvieron que inventarse, un tanto arbitrariamente, aunque sin perder de vista los fenómenos naturales de importancia. Esas unidades también tuvieron que diseminarse y consensuarse, lo que no siempre resultó tarea fácil.

Hallar una unidad de medida para la distancia no es tan obvio como parece ser en principio. Debe haber sido un enorme problema para nuestros antepasados. Vemos una montaña o la línea del horizonte, un árbol al otro lado del río, o un tejado que necesita reparación. No existen objetos o indicadores intermediarios obvios que puedan usarse para contabilizar lo lejos que está algo – de la misma forma que se usan los números para contar cuánto separa al 9 del 6. No existe un modo evidente de calcular la longitud, anchura, peso o distancia de los objetos. Tal vez se podría decir que la cabeza de un niño no pasa del hombro de un adulto, pero no se puede decir cuánto más alto es el adulto que el niño. No se puede decir que un árbol está a diecisiete ovejas de distancia.

Como dijo el matemático griego Pitágoras, existe una cosa que es la medida de todas las cosas

– el cuerpo humano. Las unidades básicas de la distancia son – o eran – la pulgada (el tamaño del pulgar – la palabra francesa para pulgada es pouce, que además es la palabra para designar al dedo pulgar), el pie (el tamaño aproximado de un pie adulto), la yarda (el tamaño aproximado de un paso) y la milla (que originalmente quería decir mil pasos). El establecimiento de todo ello requería de un acuerdo considerable (o de una legislación) y normalmente también de una gran cantidad de politiqueo. Una cosa es decidir que una unidad estándar de distancia sería el ancho de un pulgar y que otra unidad estándar sería un paso, pero ¿qué pulgar y qué paso? Y supongamos que las unidades aceptadas no se integran muy bien unas con otras – si se diera el caso, por ejemplo, de que hubiera unos 37 pulgares estándar en un paso. El tamaño relativo de las unidades tendría que modificarse para que se adecuaran todas a las formas convenidas social y matemáticamente.

Todas las unidades de medida son arbitrarias y podrían ser diferentes. Las diferentes unidades de longitud o distancia existieron en el pasado (codos, leguas) y más recientemente las formas "*imperiales*" como los pies y las pulgadas han sido en gran parte reemplazadas por el sistema métrico internacional. El sistema métrico es lógico y científico porque se organiza en unidades de diez en orden creciente, pero su origen fue arbitrario. La definición original de un metro fue una diezmillonésima parte de la distancia desde el ecuador al Polo Norte en línea recta partiendo desde París – y se basaba en lo que resultó ser una medida inexacta. En 1983 cambió la definición a la distancia a la que viaja la luz en el vacío durante 1/299, 792,458 de segundo, que no es nada fácil de comprobar.

Atar al tiempo por el rabo

El "segundo" al que me he referido (como base para legitimar la longitud exacta de un metro) es en sí una unidad arbitraria de tiempo. Las unidades principales de tiempo – día, mes, año – se derivan de fenómenos astronómicos, pero las unidades más pequeñas, como las horas, los minutos y los segundos son términos establecidos por el hombre.

Debería haber sido obvio dividir el paso del tiempo en unidades que correspondieran al intervalo entre un amanecer y otro (el aparente giro de la luna alrededor de la tierra) o el tiempo trascurrido antes de que el sol o una estrella concreta volviera a su lugar en el cielo (el aparente giro de los cielos alrededor de la tierra). Y cada medida tuvo su importancia, con fines de organización social, ritual religioso, agricultura, navegación y astronomía.[56]

Pero los ciclos de los fenómenos naturales no se combinan de manera satisfactoria entre ellos. El número de días de un mes lunar (más o menos 29 _) o de un año (más o menos 365 _) no es una cifra perfectamente redonda, ni tampoco el número de meses lunares del calendario. Para complicarlo todo más, el tiempo real que tarda la luna en completar un giro alrededor de la tierra o la tierra en girar sobre su eje, o el de la tierra en completar un giro alrededor del sol varían de forma poco predecible. Nunca se podrían usar como base para el tiempo del reloj o del calendario por los que los humanos tratamos de organizar nuestras vidas.[57]

Así, nuestro año de 365 días (con las excepciones de los años bisiestos de 366) y el día de 24 horas son solamente toscas aproximaciones a los fenómenos naturales, mientras que los doce meses de 28, 29, 30 y 31 días y las semanas de siete días son arbitrarias y torpes divisiones del año. El día en sí está artificialmente dividido en 24 horas de sesenta minutos, cada uno de los cuales se divide a

56.- Como dije en la nota 13, el cielo era mucho más interesante e importante en la antigüedad que hoy día. Las estrellas (mucho más brillantes en el cielo y más familiares de lo que son hoy día) servían como relojes, calendarios, almanaques, brújulas, señales de dirección y cúmulos de historias y reglas de vida. El conocimiento arcano y los movimientos de las estrellas y los planetas, y de las matemáticas que se usaban para describir y predecir esos movimientos, normalmente estaba en manos de la iglesia, la que por lo tanto podía ejercer gran influencia tanto en los asuntos terrenales como en los espirituales.

57.- El año basado en la tierra de 365 – y – un – cuarto de días, derivado del viaje anual que hace la tierra alrededor del sol, no podría usarse en ningún otro lugar del universo. Es necesario encontrarse en la tierra para experimentar lo que llamamos un día, desde el amanecer hasta el siguiente amanecer. El efecto conjunto de la rotación diaria de la tierra alrededor de su propio eje mientras gira a su vez entorno al sol una vez al año significa que cualquier punto de la tierra se enfrenta a la misma configuración de las estrellas en el cielo nocturno 365 _ veces al año. Este día adicional, que es importante en los cálculos de navegación, es conocido como el día sideral. El tiempo sideral es el tiempo tal como se ve desde las estrellas.

su vez en sesenta segundos, y está basado en estándares arbitrarios, no en fenómenos naturales observables.

La arbitrariedad de todos los estándares por los que el tiempo se divide significa que nadie puede averiguar lógicamente cuáles pueden ser las diferentes divisiones o cómo se relacionan unas con otras. Otra civilización (u otro individuo) podrían dividir los años y los días en unidades distintas – por ejemplo, según un sistema métrico.[58]

Puesto que las razones para administrar el tiempo en la forma en que lo hacemos no están claras, los que aprenden no tienen otra elección que memorizar hechos y relaciones que no pueden entenderse (porque no hay nada que entender). Hacer referencia al reloj con la intención de que los que aprenden puedan entender las matemáticas de las horas, de los minutos y de los segundos o el calendario de los meses, semanas y días no sirve de nada porque es necesario comprender las unidades y las matemáticas para comprender el reloj y el calendario.

Una vez más, los procedimientos matemáticos que parecen simples y claros para los que están familiarizados con ellos resultan ser complicados y opacos para aquellos que no lo están.

De cualquier modo, la presentación del tiempo y del espacio en unidades bien relacionadas tiene un enorme valor. (Iba a decir un valor "*incalculable*", pero la ventaja de la presentación es precisamente que las unidades son calculables). Una vez que el espacio ha sido dividido en millas, yardas y pulgadas (o kilómetros, metros y centímetros), y el tiempo ha sido dividido en años, días, horas y minutos, entonces tendremos unidades que se pueden contar. Y esto es solamente el principio. Cuando se puede disponer de unidades contables, toda la panoplia de las matemáticas se puede aplicar a todo tipo de cálculos útiles y fiables.

Otras medidas ingeniosas

Todas las unidades estándares de medida tienen que ser comparables con algún criterio físico para que sean transportables y convencionalmente acordadas. Mi idea de una hora o de un metro tiene que ser idéntica a la idea de los demás sobre estas unidades. La oficina de normalización de pesos y medidas es una parte importante del gobierno de una nación. En los últimos tiempos las referencias normalizadas incluso para las unidades más conocidas, como la longitud de un metro en términos de la velocidad de la luz, conllevan las definiciones más esotéricas.

El peso[59] es un tipo de medida interesante porque podemos sentirlo directamente. Sosteniendo un objeto podemos experimentar su "*peso*" y comparando diversos objetos podemos sentir cuál es más pesado. Pesar puede además implicar un acto físico delicado, el balanceo de objetos a ambos lados de un eje o de un fulcro. Establecer y comparar los pesos a mano y posteriormente por medio de una balanza debe haber sido una de las técnicas más antiguas conocida por los seres humanos, tanto en la construcción como en el comercio, precediendo incluso al cálculo matemático.

Las unidades de peso convencionales – y ha habido muchísimas – eran originalmente objetos portátiles que se habían sopesado según criterios arbitrarios, como una cantidad fija de agua. Cuando se establecieron los estándares internacionales, el kilogramo fue el peso de un volumen métrico de agua pura a una temperatura determinada. Este era un estándar complicado de mantener, así pues se pasó a una masa de metal que tenía el mismo peso que el agua. El estándar internacional actual es una pieza sólida de aleación de platino e iridio que se mantiene a temperatura constante en un laboratorio de Francia, y de la que tienen copias otros países.

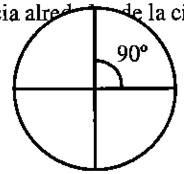
58.- Ha habido propuestas poco fructíferas de acercar la división del tiempo a una base métrica, por ejemplo con 10 "*meses*" en el año, 10 "*días*" en la semana y horas de 100 minutos, el que a su vez se dividiría en 100 segundos. Los segundos, minutos y horas métricos tendrían una duración diferente de los actuales, pero en principio no existe razón alguna por la que dicha conversión no debería hacerse. Mientras que las consideraciones astronómicas pueden hacer caso omiso de las divisiones decimales del día, podrían causar estragos matemáticos en el año. Cada uno de los 10 meses métricos habrían consistido en 36 días (3,6 semanas métricas) y sobrarían 5 y _ de días.

59.- Técnicamente debería estar hablando de masa, no de peso. La masa es una cantidad específica de materia, el peso es la forma en que se mide la masa. La distinción es tan sutil que no se ha introducido en el habla común.

El peso se definió originalmente según una cantidad fija de agua y la temperatura se define en relación con los puntos de congelación y ebullición del agua. La forma primera en que comprendemos la temperatura es como una combinación de una sensación corporal (calor, frío) y un número de una escala. Pero la forma común de medir la temperatura es según la distancia – la expansión o la contracción de una columna de metal líquido (mercurio) en un tubo de cristal estrecho.

Un tipo diferente de unidad se basa en la medida angular – la asignación común de grados para indicar la diferencia de dirección a la que dos líneas apuntan. La medida angular se ha establecido arbitrariamente dividiendo un círculo en 360 porciones iguales, cada una de las cuales se conoce como grado. Cualquiera puede hacer realizar este juicio con exactitud – al menos en principio – por lo que no es necesario mantener la unidad oficial de un grado en ningún organismo de normalización.

Para ser más precisos, un grado es la distancia angular cubierta cuando una línea que parte del centro de un círculo gira 1/360 de distancia alrededor de la circunferencia; es una unidad de rotación.[60]



Una línea recta que cruza por el centro del círculo de una parte a la otra lo divide en dos partes iguales de 180 grados cada una, y una línea vertical desde la línea base u horizontal crea el ángulo recto de 90º. Los ángulos rectos fueron ampliamente conocidos y empleados en la antigüedad. Además se pueden construir doblando una hoja de papel por la mitad dos veces, formando un triángulo con los lados con determinadas longitudes (con una proporción de 3, 4 y 5, por ejemplo) o con dos herramientas de carpintero, una plomada realizada con una piedra suspendida de un extremo de una cuerda y un nivel o simplemente con un contenedor de líquido de poca profundidad.

Los grados se definen matemáticamente según el movimiento alrededor de la circunferencia de un círculo. La rotación a la derecha de una línea vertical desde el centro de un círculo a través de la cuarta parte de su circunferencia produce un ángulo de 90º. La rotación a través de la mitad de la circunferencia produce un ángulo de 180º y un circuito completo alrededor del círculo produce 360º. El concepto de rotación da sentido a los ángulos negativos (rotación en dirección opuesta) y a los ángulos de más de 360º (más de una rotación completa). Algunos matemáticos piensan que los números negativos, sobre todo su multiplicación y división, se pueden comprender mejor en relación con la rotación de la secuencia numérica.

Las unidades técnicas de medición existen en todos los campos especializados para la luz, el sonido, el olor, el color, la electricidad, la energía, la potencia y otros más. Los nombres de muchas de estas unidades se encuentran con regularidad en nuestra vida diaria sin que necesariamente se entiendan – como las calorías, los voltios y los vatios – y otras muchas son usadas y comprendidas solamente por los expertos.

Medidas derivadas

He estado usando una gran variedad de términos para la división del espacio – distancia, longitud, anchura, peso. Todos se refieren al mismo tipo de medida, normalmente llamada lineal (o distancia en una línea). Se refieren a la extensión en un plano solamente en una dimensión. Pero las unidades matemáticas comunes se han desarrollado para el espacio bidimensional y tridimensional, cal-

60.- La determinación de un grado como el equivalente a la 1/360 de la distancia alrededor de una circunferencia es arbitraria, cuyo origen probablemente es la aproximación al número de días del año, y tiene que ver con los métodos no decimales de contar con una base de 60 más que de 10. existen alternativas. Los geómetras y otros especialistas tienden a hacer sus cálculos angulares según los radianes (que son iguales a la proporción de la distancia alrededor de la circunferencia de un círculo correspondiente a su radio) culado a partir de combinaciones de unidades lineales, mientras que otras unidades más exóticas adecuan distancias y direcciones en el espacio que no tienen en absoluto superficies planas.

La medida más común del espacio bidimensional es el área, calculada de la distancia lineal en dos direcciones: longitud y anchura o anchura y peso. Las áreas reducidas se expresan en unidades convencionales como las pulgadas cuadradas, los pies cuadrados o las yardas cuadradas (o los centímetros y los metros cuadrados). Pero las unidades de área mayores tienen que tener su propio nombre, como el acre (una rareza imperial que consiste en 4840 yardas cuadradas, el equivalente a 1/640 de milla cuadrada) y las hectáreas (10.000 metros cuadrados) en el sistema métrico.

Las medidas cuadradas no tienen que referirse necesariamente a áreas cuadradas. Las áreas de los círculos, triángulos y otras formas específicas también se expresan con medición cuadrada. Algunas medidas bidimensionales se construyen a partir de unidades tanto de espacio como de tiempo, como por ejemplo la velocidad, que computa los cambios en posición en el tiempo, y la aceleración, que tiene que ver con los cambios de velocidad en el tiempo.

Las unidades tridimensionales tienen que ver con el volumen y se expresan comúnmente en forma cúbica – pulgadas y pies cúbicos, centímetros y metros cúbicos, todos ellos calculados multiplicando un área por una tercera distancia lineal. Existen medidas cúbicas de capacidad que son particularmente útiles para materiales que nos son fáciles de contabilizar (la sal, el azúcar, el maíz o los líquidos), incluyendo las pintas y los galones imperiales y los litros métricos.

La enorme diversidad de sistemas de medida que existen en el mundo demuestra la viveza con la que las gentes de diferentes comunidades y en diferentes épocas se han afanado en poner bajo control matemático sus vidas diarias. La mayor parte de la riqueza y el color (y la confusión y la incompatibilidad) de estos sistemas históricos se ha racionalizado y normalizado en la forma métrica. Pero muchas de estas unidades históricas todavía sobreviven.

Aún se usan excepcionalmente determinadas unidades de carácter peculiar. Es el caso de las usadas por los farmacéuticos (gránulos, copita), por los cocineros (cucharada, taza), por los joyeros (quilates), por los marineros (brazas, nudos), por los impresores (puntos, picas) por los topógrafos (concatenación), y para el papel (mano, resma), para la ropa (pieza) y para la madera (tabla, haz).

Las posibilidades para expresar y desarrollar el pensamiento que ofrece la construcción de unidades distintivas no terminan con las matemáticas. Cualquier cosa que se pueda contar se puede representar gráficamente – en gráficos de puntos, gráficos de barras, gráficos de tarta y cualquier otra forma visible – para mostrar las relaciones entre números e incluso para resolver los problemas numéricos sin el cálculo matemático.

Y la reducción de la mayoría de unidades a una sucesión de ceros y unos (o de la presencia y ausencia, o "*abierto*" y "*cerrado*") ha hecho posible la digitalización que conllevan muchas de las tecnologías electrónicas contemporáneas, incluyendo la reproducción de alta resolución de imágenes y sonido.

Medidas que escapan

A pesar de la sorprendente cantidad de unidades contables que el cerebro humano ha ideado en su intento por colocar una red matemática por todo el mundo, no todo en lo que estamos interesados se puede fácilmente reducir a la medida. Muchos aspectos significativos de la vida diaria continúan eludiendo el entusiasmo unificador de los contables y las medidas.

La economía, la sociología y la psicología, por ejemplo, continúan siendo ciencias inexactas debido a la dificultad de medir lo relacionado con los valores, sentimientos y emociones humanas. ¿Cómo sería una unidad de la alegría, de la tristeza, del deseo, de la privación, de la salud, de la cólera, del miedo o de la pérdida?

A veces se emplean medidas bastante aproximadas e incluso discutibles para que el comportamiento humano sea sujeto al análisis estadístico, y con frecuencia se les atribuye una realidad que no las justifican. Este ha sido especialmente el caso de la educación, donde se otorga equívocas "*puntuaciones*" y "*notas*" al rendimiento de los estudiantes. Estos últimos, los padres, los periodistas, los políticos y las autoridades educativas con frecuencia toman estas dudosas unidades en serio, y comparan a los individuos y a las instituciones unos con otros y toman decisiones que pueden provocar enormes efectos en las vidas de las personas.

La creencia de que poner números a las capacidades y al comportamiento de las personas es "*objetivo*" produce el contrario efecto de subestimar el juicio humano. La experiencia y la sabiduría no cuentan en absoluto cuando se enfrentan a las estadísticas, aunque los números sean más aproximados o parciales que los juicios de las personas que comprenden las situaciones desde una perspectiva más amplia. Por supuesto que los seres humanos pueden también tomar decisiones que sean erráticas y parciales, pero normalmente resulta más fácil detectar y rectificar dichas anomalías que lo es con los acorazados números.

CAPÍTULO 9

Notación – Puntos de referencia en el mundo de las matemáticas

Las matemáticas son todo lo que se puede hacer con los números. No obstante, los números por sí solos se pueden usar para bien poco aparte de para contar. Cualquier cosa que se desee hacer con los números, cualquier modelo o relación que se quiera explorar, requiere de la notación. Y la notación es la roca donde cualquier empresa matemática va a pique; el lugar donde el lenguaje natural y las matemáticas se separan en los lados opuestos del muro de cristal. Incluso el ubicuo signo = no puede nunca explicarse del todo con palabras.

Porque en tanto en cuanto las personas han tenido números, han tenido que inventar la notación para usarlos. Aún así, muchas de las personas que tienen problemas con las matemáticas consideran que la notación es más problemática que los números. ¿Cómo es posible que algo que se supone que es una ayuda resulte ser un obstáculo?

En primer lugar tratemos de aclarar de qué estamos hablando o, al menos, de aclarar el lenguaje usado al discutir la notación matemática. Una vez más, observaremos que el lenguaje diario no es del todo útil cuando hablamos de cuestiones matemáticas – ese es uno de los problemas. Pero puesto que el lenguaje diario es el único con el que contamos para comunicarnos, es mejor que examinemos lo preciso que resulta al discutir la notación de las matemáticas.

Lo que sigue son los tipos de notación matemática a los que me estoy refiriendo:

+ - x (o * o •) ÷ (o /) =

junto con los más esotéricos:

( ) ∴ < > ± √ ∠ ∈ Σ ∪ ⊃ ⊇ ∫ π Δ y muchos otros, así como sus equivalentes griegos:

α β φ ω

e igualmente los números

1 2 3... (ocasionalmente en forma romana: I II III...)

Los puntos también son una notación matemática que indica que la serie puede continuar.

¿Con qué exactamente estamos tratando en este rico conjunto de elementos rotacionales? Se habla de ellos de distintas formas. A veces se les llaman signos (como en "+ *es el signo más*") y otras veces se les llaman símbolos (como en "+ *y - son símbolos matemáticos*"). A veces se dice que indican determinadas situaciones matemáticas y otras veces que las representan.

¿Qué son, signos o símbolos, indicadores o representaciones? ¿Y supone alguna diferencia cómo se les llame? ¿Si es así, cómo se les debería llamar?

Hasta cierto punto, cómo se les llame supone una diferencia obvia. Algunas personas que sienten poca afinidad con las matemáticas dicen que es porque tienen dificultad en pensar simbólicamente o que la sola visión de un símbolo les provoca bloqueo mental. Pero nunca he conocido a nadie que diga lo mismo con respecto a los signos. Si a los elementos notacionales de las matemáticas se les conociera como signos en vez de cómo símbolos, ¿desaparecería el muro de cristal?

Signos, símbolos, iconos, indicadores y representaciones

Como siempre, no sirve de nada buscar en los diccionarios el significado exacto de signo y símbolo. Los diccionarios nos dicen cómo se usan determinadas palabras, pero no lo que las personas que las usan realmente piensan sobre lo que están hablando.

El problema no es que las personas usen las palabras con poca precisión, sino (ya lo he dicho varias veces anteriormente) que las palabras en el lenguaje diario no tienen significados precisos.

En un sentido muy común, un signo es simplemente la indicación de lo que se puede o se debería hacer – girar a la derecha, parar, no fumar, pagar aquí, salir, aparcar, entradas, comida rápida, etc. en este sentido, + y - pueden considerarse razonablemente signos; indican adición y sustracción. Normalmente, se considera que un signo es arbitrario, sin una conexión o parecido obvios con lo que se supone que indica. No "*significa*" nada, en el sentido de poder ocupar su lugar.

Sin embargo, algunos signos pueden ser proféticos y estar estrechamente asociados con lo que indican. Las nubes negras son signo de lluvia. Los puños cerrados son signo de ira. (A los signos que deliberadamente se inventan para que tengan parecido con aquello que quieren representar, como los signos de señoras y caballeros en los aseos públicos o las múltiples imágenes que se usan en los monitores de los ordenadores, se les llama iconos).

Y en un sentido muy común, un símbolo es simplemente algo que significa otra cosa, normalmente con una asociación conceptual si no un parecido directo. La corona es símbolo de la realeza, un rifle es símbolo de poder, la paloma es el símbolo de la paz. El logotipo de una empresa es un símbolo. En este sentido, los símbolos son señales de lo que representan. Pueden adorarse o temerse. Si no se puede saludar al rey, se saluda a la bandera.

Pero la palabra símbolo también se usa comúnmente para referirse a un tipo particular de forma tipográfica – un "*carácter*" en una maquina de escribir o en el teclado de un ordenador. No existe nada simbólico en los símbolos del teclado pero desde luego que yo no los llamaría signos.

No existe una línea divisoria clara entre la forma en que se usan dos palabras en la vida cotidiana. Cosas que en ocasiones llamamos signos, en otras las llamamos símbolos.[61]

A veces no podemos decir si algo pretende ser un signo, un símbolo o un icono a menos que entendamos la idea que está detrás de él. Un animal pintado en el muro de una caverna puede ser una representación de algo que el artista vio durante el día, una indicación de algo que tenía en mente, un signo de que el cazador había conseguido una presa o un símbolo de algo que tenía que adorarse.

No hay nada raro en todo esto. Una ambigüedad similar existe con la notación musical. ¿Qué es ? Es un signo cuando indica que determinada nota o notas deben tocarse o cantarse en clave triple; es un símbolo cuando aparece impreso en la cubierta del programa de un concierto; y en compañía de otras notaciones musicales representa un pasaje musical.

61.- Los semióticos – especialistas que estudian los sistemas notacionales – hacen una distinción técnico entre los signos y los símbolos, y reservan los primeros para los casos en los que existe conexión o parecido físico de cualquier clase y los segundos para asociaciones convencionales o arbitrarias. Pero ningún individuo o grupo pueden establecer normas sobre cómo las personas en general usan el lenguaje. Tampoco existe nada erróneo con respecto a cómo las personas en general usan el lenguaje, siempre y cuando las entiendan aquellos a quienes va dirigido el mensaje. La cada vez mayor – y esencialmente artificial – precisión tiene un precio. Exige leyes draconianas sobre el uso del lenguaje, que muy pocos tolerarían, o más palabras. El filósofo KARL POPPER (quien siempre escribió claro y lúcidamente) dijo que la extra precisión en el lenguaje solamente se podría conseguir a costa de la claridad (1976, p.24).

Desde el punto de vista tipográfico, todas las notaciones matemáticas son símbolos (sin ser simbólicos). Desde el punto de vista práctico, todas las notaciones matemáticas son signos de que algo se ha hecho, o se debería hacer. Pero desde el punto de vista puramente matemático, todas las notaciones representan relaciones.[62]

Los signos, los símbolos, los iconos, las representaciones y los indicadores (por no hablar de las imágenes, los emblemas, las abstracciones, los operadores) son un grupo de palabras que cubren un amplio rango de significados, a veces solapándose, y que tienen normalmente más de un significado. La riqueza de uso es típica del lenguaje – en realidad, contribuye al poder del lenguaje – y constituye un problema solamente cuando las personas exigen una particular precisión en el uso de las palabras o creen que el examen detallado de una palabra revelará una verdad esencial sobre aquello a lo que ésta se refiera. Todo lenguaje cotidiano es convencional y depende en gran parte del accidente histórico y de una implícita comprensión y acuerdo comunal.

¿Así pues, a dónde nos lleva esto con respecto a la notación matemática? Significa que no importa cómo hablemos de los distintos elementos notacionales – si los llamamos signos, símbolos, marcas, caracteres o lo que quiera que sea – siempre y cuando no creamos que los nombres revelen nada profundo sobre la notación en sí. Y siempre y cuando no pensemos que hay algo distintivo en la notación matemática que la hace intrínsecamente más difícil de entenderse que otros elementos similares en otros contextos.

En todo caso, ¿cuál es el significado o propósito esencial que hay detrás de los diferentes tipos de notación matemática? Una posibilidad, a la que ya he aludido, es simplemente decir que la notación se usa para representar ideas o situaciones matemáticas particulares. Una posibilidad alternativa, que comporta gran poder, es considerar la notación como un intermediario entre la mente humana y el mundo de las matemáticas.

EL PAPEL DE LA NOTACIÓN MATEMÁTICA

Déjenme presentar una nueva metáfora. Cada vez que hacemos algo matemático – o pensamos matemáticamente – desenrollamos en nuestra mente un tapiz imaginario de extensión ilimitada, del que cada pequeño pespunte es un número. Y cada uno de esos pespuntes forma parte de una serie indefinida de complejos modelos.

Si seguimos los mismos pespuntes, descubriremos los mismos modelos, las mismas relaciones. Y lo mismo le ocurrirá a cualquiera que siga la misma ruta. Existen innumerables modelos entre estos pespuntes, algunos muy corrientes y otros muchos apenas conocidos por algunos, y otros todavía por descubrir. Podemos seguir determinadas directrices que nos revelen modelos en los que estamos interesados y podemos dar directrices que otros puedan seguir.

Lo más notable del tapiz es que no es necesario desenrollarlo por completo para explorar una parte. A los números en los que no estemos interesados, o no vayamos a necesitar, no es necesario que se les moleste. Para sumar o multiplicar 472 y 476, no es necesario pensar en 473, 474, 475, o cualquier otro número que sea irrelevante para el propósito que persigamos; tampoco necesitamos en este caso la resta ni la división o la raíz cuadrada.

¿Qué es lo que nos permite realizar estos movimientos precisos y específicos –el uso de una aguja finísima puede ser una buena analogía? La notación.

La notación indica los diferentes tipos de modelo que pueden existir entre los pespuntes del mágico tapiz de los números. No indica todos los modelos posibles – nada podría hacerlo – pero sí

62.- Para ser mucho más preciso, las personas representan relaciones a través de la notación. KAMII (1985, 2000) ha señalado que los cuadros, los grupos de objetos y los signos o símbolos matemáticos no representan nada. La palabra "tres" y el número 3 no representan tres de nada, ni siquiera la idea de tres; el número 3 se usa o lo toman las personas (en el caso que ella está discutiendo, niños) para representar cualquier idea o función de tres que tengan en mente. Por tanto, cuando estoy hablando de notación que representa cualquier cosa, es un atajo para decir que las personas representan ideas a través de la notación.

indica los especialmente significativos y útiles. Además nos enseña cómo descubrir aspectos particulares de esos modelos. La notación es muy parecida a los símbolos cartográficos de un mapa, que conectan la mente humana con la parte del mundo físico que el mapa representa. La notación de las matemáticas conecta la mente humana con los caminos y los rasgos del mundo de las matemáticas. Nos ayuda a comprender lo que hay detrás del muro de cristal.

El poder de la igualdad

Tal vez la relación más importante de las matemáticas, a través de toda su larga y compleja historia, es la relación representada por uno de los primeros signos que se aprenden, el de la igualdad. Estoy hablando del signo =, el más importante y aún así el menos discutido de todos los elementos notacionales.

La igualdad es el eje sobre el que cualquier enunciado matemático gira. Todo aquel que no entienda "*igual*" nunca entenderá las matemáticas.

Aún así, el concepto de igualdad raramente se enseña de modo específico, y cuando se hace, la explicación probablemente es poco precisa e incompleta. Pero tiene que serlo. La igualdad en las matemáticas es algo que se tiene que entender desde dentro, experimentarse más que te lo enseñen. La igualdad, matemáticamente hablando, no se puede traducir a palabras, como ya advertí en el capítulo 3.

A veces, al signo = se le considera el nexo entre una pregunta y una respuesta; 2+3 es la pregunta y 5 es la respuesta. Este es específicamente el caso de los primeros cursos escolares, donde cada línea de los ejercicios matemáticos está cubierta por signos =. En niveles superiores de razonamiento matemático, el signo = indica los sucesivos pasos de una argumentación o demostración, donde nada puede quedar en la izquierda:

$$\begin{aligned} 1/2 + 3/4 &= 2/4 + 3/4 \\ &= 5/4 \\ &= 1\ 1/4 \end{aligned}$$

Las escaleras de signos = pueden en ocasiones extenderse a lo largo de páginas y páginas de razonamientos matemáticos, sin que, desde la primera línea aparezca en ningún momento nada en la parte izquierda. Por el contrario, el = representa otro paso más en una compleja aunque dirigida secuencia de movimientos desde el primer enunciado a la izquierda del signo hasta el enunciado final de la derecha. En otras palabras, cada = indica un pequeño cambio de dirección en la progresión desde un modelo matemático hasta el siguiente, un movimiento desde un pespunte hasta el siguiente.

Cada paso puede ser una igualdad, pero la secuencia entera es un viaje. Cada = introduce un movimiento que tiene un propósito porque se dirige desde un punto – el punto de partida – hasta un destino que puede estar muy lejos. El destino puede ser familiar (una demostración) o algo desconocido hasta ahora (un descubrimiento), y el viaje desde el punto de inicio hasta su destino puede completarse de otras formas (como en las "*pruebas*" matemáticas). Pero cada = es una garantía de que se sigue el camino sin interrupciones, de que el hilo matemático no se rompe.

Por supuesto, hasta ahora estoy moviéndome en la metáfora. Pero cualquier intento de explicar = en el lenguaje diario está abocado a ser metafórico. El signo = tiene un significado, un significado muy preciso, pero es un significado que no puede explicarse por completo con palabras; solamente puede intuirse y comprenderse matemáticamente. En cierto sentido, 1+1=2 explica todo sobre el signo =.

Signos familiares y desconocidos

Debido a que los signos +, -, x, ∏ son familiares, tendemos a pensar que son obvios y claros. Aunque normalmente se les conoce como operadores, o como signos para "*operaciones*" matemáticas, estos signos son en realidad expresiones de relaciones; representan relaciones particulares entre modelos infinitos de números, de la misma forma que la notación musical representa diferentes tipos de melodía, ritmo y armonía.

Por sí solos, 472 y 473 no significan nada, pero conectados por los familiares signos +, -, x, ∏, forman caminos únicos entre los modelos infinitos de números.

Lo mismo ocurre con otros elementos notacionales, que para muchos pueden resultar menos familiares, como es el caso de los números elevados a la segunda potencia (32 = 9) o el de las raíces cuadradas (÷9 = 3). Una notación que me entusiasmó la primera vez que la vi es el signo factorial, o !, que sucintamente indica (con evidente sorpresa) un número multiplicado por todo número entero menor a él mismo:

6! = 6x5x4x3x2x1= 720

Un pequeño círculo a modo de superíndice indica que nos encontramos en el ámbito de los grados, como en 90°. Representar los ángulos con un pequeño cero podría considerarse una rareza, pero no más que la notación para las fracciones de un grado, cuya sexagésima parte es un minuto, representado como , y cuya sexagésima parte se llama segundo y se representa con ˝. Los minutos y los segundos obviamente subdivisiones de la hora, en las mismas sexagésimas proporciones y se representan con los mismos signos ´y ˝.

Sorprendentemente, dado que las matemáticas provienen de la tan familiar relación para todos (incluidos los niños) "mayor que" y "menor que", la notación matemática para "mayor que" y "menor que" (> y <) se introduce relativamente tarde en el desarrollo matemático de muchas personas y con frecuencia causa cierto desconcierto.

La relación representada por > y < puede resultar especialmente difícil de comprender cuando se usa en expresiones como

20<X< 30

que se supone que se lee "20 es menor que el número representado por la X, que es menor que treinta".

Un modo más comprensible de plantear este enunciado podría ser "*X es el número que está entre 20 y 30*" o "*X es mayor que 20 y menor que 30*". En ambos casos, X es el sujeto de la expresión y se comprende mejor si se lee en primer lugar. Pero ni "*X >20, X<30*" ni "*X >20<30*" son enunciados matemáticos gramaticales. La expresión "*20<X<30*" tiene sentido solamente desde una perspectiva matemática, como una oración que se deba leer de una sola vez.

Algunos elementos notacionales se usan específicamente para ayudar a los lectores a usar expresiones matemáticas y para asegurarse de que no se siguen direcciones erróneas. Estos signos, cuando se usen y si se usan, siguen reglas muy estrictas, siendo la primera que deben siempre aparecer en pareja. Me estoy refiriendo a las llaves (o paréntesis) como ( ), { }, y [ ].

A veces, el uso de las llaves es opcional, simplemente en aras de la claridad, como cuando he escrito la forma más legible (5+2) en vez de 5+2 en este texto. A veces son obligatorias. A veces van insertadas, como en las expresiones (33 ∏ (7+6(12-7))), donde la computación indicada en el par de paréntesis más interno debe realizarse en primer lugar. La expresión matemática anterior es una expresión matemáticamente perfecta, a pesar del amontonamiento de paréntesis en la derecha. Los paréntesis insertados son raramente aceptados en el lenguaje escrito – (donde se consideran poco útiles (y confusos (para muchas personas))) – y nunca se leerían desde dentro hacia fuera.

CUANDO LA X INDICA UN PUNTO

Por primera vez, en las últimas páginas, he introducido la ubicua letra X para que ocupe el lugar de un número específico o desconocido. Es el momento de referirnos a esas ocasiones en que los símbolos matemáticos son realmente símbolos, porque significan otra cosa. (Usaré la X mayúsculas para que resulte más legible, pero en matemáticas es indiferente el uso de la minúscula como de la mayúscula, mientras que en otros contextos la x, y, z y la X, Y, Z tienen funciones y significados diferentes).

El uso de las letras para reemplazar a los números tiene una historia y un nombre, álgebra, [63]que hace mención a tiempos antiguos, y que ha añadido un inmenso poder a las matemáticas. En efecto, permite a los matemáticos estudiar lo que los números hacen sin usar en realidad los números.

En expresiones matemáticas, las familiares A, B, C y las X, Y, Z representan cualquier número. A veces dicen lo que es el número, como en $X = 7$, y a veces no. A veces es necesario hallar lo que la X representa: $5 + X = 7$, por lo tanto $X = 2$. En esos casos, a la X se le llama una incógnita. Pero en otras ocasiones no hay un número específico al que la letra represente, y en ese caso a la X se le llama variable. El número específico que la X representa en una determinada ocasión depende del contexto en el que la X se encuentre; en la parte de las matemáticas que se esté observando. Es el camaleón de un número. Los niños normalmente no tienen problema alguno cuando la X aparece como incógnita, pero sí se muestran confusos cuando es una variable.

El uso de las letras como variables evita muchas repeticiones matemáticas. La antigua receta para construir un triángulo con un ángulo recto era hacer los lados en la proporción 3, 4 y 5, porque todos los triángulos tienen un ángulo recto si los cuadrados de los dos lados más cortos son igual al cuadrado del lado mayor. (Por ejemplo, 32 +42 = 52, es decir, 9 + 6 = 25). Pero existen muchísimas otras formas de construir un ángulo recto; una de ellas es 92 + 122 = 152, es decir, 81 + 144 = 225. Una forma simple de expresar esas relaciones que un triángulo con ángulo recto se produce cuando los tres lados, llamados a, b y c presentan la relación a2 + b2 = c2.

Existen además ocasiones en que un número en particular no se conoce y nos gustaría usar una "*señal*" de forma que se pueda seguir con el proceso matemático. Se usa un símbolo álgebraico de la misma forma que se usa un marcador en un libro para señalar algo que en ese momento no se entiende, y donde queremos volver una vez que hayamos descubierto el significado.

Especialistas de muchas profesiones usan las fórmulas algebraicas para solucionar ecuaciones complejas, y el álgebra la usan los matemáticos especializados para explorar las matemáticas, convirtiéndola casi en el lenguaje de las matemáticas. Es más fácil expresar estructuras del sistema numérico con el álgebra, de la misma forma que es más fácil hablar en general sobre las personas si no queremos nombrarlos por sus nombres propios.

El centro de las tinieblas

Muchas personas tienen grandes dificultades con el álgebra – incluso con un simple símbolo algebraico – o con cualquier otro tipo de notación matemática. Explican que "*no pueden pensar simbólicamente*" o que les provoca nauseas la simple visión de los símbolos. Se muestran ciegos ante cualquier cosa que no sea una letra o un número tal y como los conocen en el familiar contexto del "*mundo real*".

Pero es difícil entender por qué una persona se puede mostrar tan afligida ante algo así. "*Símbolo*" es solamente una palabra (aunque tal vez es la palabra a la que tienen miedo las personas que dicen no gustarle los símbolos). Nos encontramos con símbolos todos los días y les damos senti-

63.- La palabra árabe de donde proviene el término es al-jabra, que se refiere a la fijación de un hueso roto. El salto metafórico desde un proceso quirúrgico al uso de las letras en lugar de los números es demasiado complejo incluso para tenerlo en cuenta do sin ser conscientes de ello.

Entendemos los iconos que hay en la pantalla del ordenador. No tenemos dificultad alguna con el significado de _ y de _. No tenemos problema alguno en considerar la bandera un símbolo de un país, o un anillo como símbolo de un compromiso, o un corazón como símbolo del amor. Entonces, ¿por qué la dificultad con las inofensivas X, Y, Z? La única ocasión en que las personas tienen miedo a los símbolos es cuando el tema son las matemáticas o cualquier otro tema "*técnico*".

El temor a los símbolos puede ser una racionalización de un fracaso más general en la comprensión o una reliquia de algunas experiencias desagradables. Pero sospecho que el problema subyacente es que las víctimas de la símbolofobia nunca entran en el mundo de las matemáticas para observar los elementos notacionales desde dentro. Ese es el centro del problema. La falta de comprensión conduce invariablemente a las dificultades con la memorización.

Desde fuera del mundo de las matemáticas, mirando a través del muro de cristal, las personas verán los símbolos matemáticos como algo feo e indescifrable. La mayoría de las personas conocen los símbolos algebraicos después que los números; los símbolos se presentan como algo diferente a los números, y aparentan ser totalmente distintos. Justo cuando ya pensamos que la cuestión de 1, 2, 3, 4… está totalmente bajo control, aparecen otros símbolos, algunos de los cuales los conocemos – como es el caso de las letras del alfabeto –, pero en un contexto totalmente extraño. Y como siempre, las explicaciones verbales no dicen nada a los no iniciados matemáticamente. La comprensión hay que elaborarla, no confiar en ella.

No es el fin de la historia

Todos los signos matemáticos son arbitrarios. Podrían ser diferentes y de hecho muchos lo fueron en el pasado. Para Newton, hace menos de 400 años, la multiplicación se indicaba poniendo los dos números implicados en ella uno junto al otro, sin ningún signo específico.[64]

Los signos matemáticos están siempre sujetos al cambio y desde luego que todavía no se ha dicho la última palabra en cuanto al conjunto que ahora usamos.

Los ordenadores han traído consigo un enorme cambio en la notación matemática, gran parte de ese cambio para adecuar el teclado. El ∏ que era un elemento básico de mi niñez no viene representado en mi teclado (lo que no deja de ser una inconveniencia) y ha sido ampliamente sustituido por la "*barra inclinada*" (/), que poco tiene que hacer en la comunicación persona – a – persona. La letra X de mi teclado no es adecuada para emplearse como la x matemática y hoy en día la multiplicación se representa con una estrella o un asterisco (*), otro símbolo tipográfico del teclado que de otra forma no se usaría mucho. El cuadrado de un número se indica con un doble asterisco: 3** = 9. Incluso más enrevesado, las potencias de los números se indican con un acento circunflejo: 3^2 = 9; 4^3 = 64, que es además la notación empleada en la calculadora que yo uso.

Debido a la arbitrariedad de la notación matemática, no hay manera alguna de que el significado de los signos matemáticos salte con facilidad al ojo o a la mente del que aprende, aunque las personas familiarizadas con su uso tengan la sensación de que el significado es obvio, indiscutible e inmediato. ¿Qué otra cosa podría significa + sino "*más*"?[65]

64.- Todavía existen ocasiones en las que el signo se omite en la multiplicación, por ejemplo, con los signos algebraicos (6X significa 6 x X) y delante de los paréntesis – 6 (2 + 3) significo 6 x (2 + 3).

65.- El signo + tiene una herencia literal, aunque sería difícil adivinarla hoy. En la Edad Media, + derivó de la letra t en la palabra escrita et, que significa "y" (que bien podía ser mejor nombre para ese signo que "sumar")

CAPÍTULO 10

Números entre números

Atravesemos el muro de cristal, vayamos al mundo laberíntico de las matemáticas. Los enteros (los números enteros positivos y negativos) tienen posibilidades ilimitadas de construir nuevos números. Sumemos dos números cualquiera, no importa lo grandes que sean y obtendremos un nuevo número que es el total exacto de ambos. Multipliquemos dos números, no importa su tamaño, y el número que resulte será el producto preciso de los otros dos números.

Las mismas ilimitadas posibilidades se aplican a la sustracción, puesto que hacemos uso del 0 y de todos los números "*negativos*". Los números negativos se aseguran de que siempre se encuentre un resultado preciso para la suma, la multiplicación y la sustracción de números más pequeños que 0. No es fácil imaginar circunstancias en las que tengamos que multiplicar esas cantidades tan pequeñas, especialmente porque el resultado es un número incluso más pequeño, pero conforta saber que no importa lo grandes o pequeños que sean los números con los que estamos tratando, no existe riesgo alguno de que nos quedemos sin números para la suma, la sustracción y la multiplicación.

Pero el sistema de los números enteros tiene además innumerables vacíos. Mientras que los enteros pueden proporcionar siempre un valor para la suma, sustracción y multiplicación, no siempre se encuentra un número entero para la división. Si se intenta dividir 3 entre 2, u 8 entre 3, el valor que resulta queda entre dos números enteros adyacentes. Es mayor que uno de los números, pero menor que el otro.

Para los pioneros en el mundo de las matemáticas, la necesidad de rellenar los huecos que aparecen entre los enteros del sistema de los números enteros constituía un molesto problema. Pero una vez más el sistema numérico demostró su extraordinaria versatilidad. Se podía crear un sistema de números diminutos que rellenaran los huecos que quedaban entre los números enteros, un mundo dentro de otro mundo, que se integrase sin fisuras en un sistema mayor. Un modo familiar de construir estos subsistemas era a través de las fracciones.

FRACCIONES

A la raza humana le llevó cientos de años averiguar que las fracciones podían rellenar los espacios que quedaban entre los números enteros, y todavía son muchas las personas que no logran entenderlas ni usarlas. También los niños encuentran dificultad en comprender que las fracciones son números que se pueden tratar exactamente igual que los números enteros. Las fracciones no son intuitivamente obvias.

Preguntemos a las personas si entienden las fracciones y nos dirán que "*por supuesto que sí*" y nos hablarán de dividir tartas y pizzas en porciones pequeñas. Pero eso no significa que comprendan las matemáticas de las fracciones, sino que saben dividir una tarta. Apenas se han aventurado más allá de la experiencia y del lenguaje cotidianos. Algunas personas incluso dicen comprender las fracciones porque pueden recordar un par de reglas, por ejemplo, que para dividir una fracción entre otra se puede invertir la segunda fracción y multiplicar (_ ÷ 1/3 = _ x 3/1 = 1 _). Pero no pueden decir por qué es así, ni siquiera ofrecer una estimación de cuál podría ser el resultado.

No estoy diciendo que eso se deba a la ignorancia o a la falta de aplicación de la teoría enseñada. Es debido a que la persona no ha entrado en el mundo de las matemáticas. Una mayor práctica mejorará la "*destreza*" para realizar rutinarios problemas matemáticos con fracciones, pero no mejorará la comprensión. Se debe a que la mayor parte del pensamiento que las fracciones demandan es contrario al razonamiento cotidiano. Las fracciones son imposibles de comprender desde la parte "*del mundo real*" del muro de cristal. Una cosa es visualizar las relaciones entre unas porciones de tarta y otra muy distinta es contemplar las relaciones de las fracciones entre sí y con los números enteros dentro del mundo de las matemáticas.

La naturaleza de las fracciones

La idea de que algo pueda ser completo en sí mismo aunque funcione como parte de algo más grande no es un concepto extraño fuera de las matemáticas. La distinción entre una parte y un todo es fundamental para la forma en que los niños instintivamente organizan su experiencia, y ello se refleja en el lenguaje de cada día.

Expresiones como "*parte de*", "*trozo de*" "*un poco de*" las usan con frecuencia y las comprenden las personas que no tienen conocimiento matemático alguno. Lo mismo se puede decir de un término más específico: "*mitad*", y posiblemente de "*cuarto*". Pero las demás palabras relativas a las fracciones se toman directamente del mundo de las matemáticas, como "*quinto*", "*sexto*", "*séptimo*" y solamente se pueden entender desde el punto de vista matemático. Es difícil imaginar una quinta parte o una séptima parte de una pizza, e imposible de imaginar una décimo quinta o décimo séptima parte, o la diferencia entre ambas.

Ya en la antigüedad probablemente se hablaba de "*mitades*" mucho antes de saber nada de las matemáticas y lo mismo ocurre en la actualidad con los niños y con las personas que no saben de matemáticas. Pero el lenguaje y la experiencia diarios hacen poco por ayudar a comprender las complejidades de las fracciones en los contextos matemáticos. El estatus y las funciones de las fracciones constituyeron un enigma para los matemáticos expertos durante cientos de años. Se supone que los estudiantes deben aprenderlas pero no se les dice por qué o qué problemas matemáticos se supone que deben resolver las fracciones. Dos problemas distintos fueron los que encontraron las personas en el pasado cuando trataron de hallar las formas de dar sentido a las piezas que sobraban después de que un número fuera dividido por otro, piezas que nunca aparecían ni se necesitaban cuando se trataba de la suma, la resta o la multiplicación de los enteros. Un problema específico era hallar un modo de pensar en las partes de los números enteros – tener el concepto de lo que podía significar 1/3 o 5/7, además de algo menos que un número entero. El segundo problema, más general, era una forma sistemática de completar los espacios entre los enteros con partes que tuvieran las propiedades de los números.

Darle sentido a las fracciones

¿Qué significa el tercio o los dos tercios (1/2 o 2/3) que sobran (el "*resto*") en las divisiones de 7 ÷ 3 o 8 ÷ 3? La clarificadora comprensión que surgió gradualmente era que el problema era su propia respuesta. No había nada que hacer con 1/3 o con 2/3; simplemente había que considerarlas de forma distinta. La solución es un juego de manos matemático.

¿Qué es uno dividido entre tres? Un tercio. Uno dividido entre tres es el equivalente de una tercera parte, o 1/3. ¿Qué son dos dividido entre tres? Dos tercios – dos dividido entre tres es el equivalente de dos terceras partes, o 2/3.

La pregunta y la respuesta parecen sonar y resultar lo mismo, pero significan diferentes cosas porque se producen desde un punto de vista diferente para un fin diferente. Es como cuando alguien pregunta "*¿buenas vacaciones?*" esperando recibir alguna información y el otro responde, "*¡Buenas vacaciones!*" para proporcionar información.

Incluso la notación matemática apareció para reflejar la similitud que tiende un puente a la diferencia. A efectos de claridad en los libros, y para trabajar con aprendices de las matemáticas, la división normalmente se indica con el signo ÷, como en 3 ÷ 4. El mismo problema puede describirse con un número colocado encima del otro, como en _. Pero la alternativa generalmente empleada por los usuarios experimentados de las matemáticas es mantener todo en una línea, indicando la división con una barra. Así, 2 ÷ 3 también se puede escribir 3/4.

Por lo general, las fracciones se escriben una encima de la otra, como en _, especialmente en el caso de los estudiantes. Pero una vez más se pueden escribir en una sola línea con la barra, como en 3/4 para tres cuartos.

Así pues, nos encontramos con la curiosa situación de que una división y su resultado se pueden escribir de la siguiente forma:

2/3 = 2/3

Esto no es tan redundante ni tan falto de sentido como pueda parecer. Para leer "*2/3 = 2/3*" correctamente hay que decir "*dos dividido entre tres es igual a dos tercios*". Los mismos dígitos tienen nombre diferente según en la parte en que estén. El 2 de la izquierda (en la división el "problema") se llama el dividendo (el número que se tiene que dividir) y el 3 junto a él es el divisor (el número por el que se debe dividir el dividendo). El 2 de la derecha (en la solución fraccional) se llama numerador (enumera el número de partes que tenemos) y el 3 junto a él se llama denominador (denomina la magnitud de esas partes).

Existe otra diferencia matemática importante. La "*división*" de la izquierda expresa una relación particular entre dos números independientes, el 2 y el 3. La fracción de la derecha es un número con todo su derecho. Cada fracción (como _ _ _) puede parecer una combinación de números, pero en realidad se puede – y se debe – tratar como una cantidad única. Cuando las fracciones se añaden al grupo de los números naturales (1, 2, 3...), formando con el cero y los negativos los enteros (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...), a toda la colección se le conoce matemáticamente como los números racionales, donde la palabra racional indica que todos se consideran en vista de la razón.

Por lo tanto, ¿qué tienen en común las dos partes de la ecuación, el problema y la solución? ¿Por qué parecen iguales aunque desempeñan diferentes papeles?

La respuesta es que ambos expresan una ratio – la misma ratio – desde diferentes puntos de vista. El "*problema*" de 1 ∏ 3 (dividir uno entre tres) puede decirse que significa "*encontrar un número*" que tenga la misma proporción con uno como uno lo tiene con tres. La "*solución*" fraccional 1/3 es un número que tiene la misma proporción con respecto a uno que uno tiene con tres.

El problema 2 ∏ 3 exige encontrar un número que tenga la misma proporción con 2 como 2 los tiene con 3. La fracción 2/3 es un número que tiene la misma proporción con 2 que 2 tiene con 3.

Ratios

Un número es completo en sí mismo. Es un 3 o un 5 o un 8, al igual que un animal es un caballo, una vaca, un tigre (u otro). No es necesario decir, ni para un número ni para un animal, que los son dependiendo de con qué comparezcan. Los números son magnitudes puras. Incluso las fracciones lo son.

Por otro lado, una ratio es una magnitud relativa; es una proporción que implica a dos números. Al igual que un caballo no puede considerarse grande o pequeño a menos que se le compare con otro caballo, una ratio solamente puede existir cuando un número es comparado con otro. La ratio de 2 con respecto a 3 (escrito 2:3) es la proporción del número 2 comparado con el número 3, o de 2 de algo con 3 de otro algo. Tal vez suena redundante decir que los números 2 y 3 permanecen en la ratio de 2 con respecto a 3, pero lo mismo les ocurre a 4 y a 6, 20 y 30, 40 y 60; y a innumerables parejas de números que pueden reducirse a la relación proporcional de 2:3.

Dos tazas de harina con respecto a tres tazas de azúcar son una ratio de 2:3. Por lo tanto, 20 tazas de harina con respecto a 30 tazas de azúcar. O 6 bolsas de arena con respecto a 9 de cemento.

En otras palabras, una ratio es una relación fija entre dos números. Se puede aplicar a cualquier número y a cualquier cosa a la que se puedan aplicar los números. Dada la ratio y un número, podemos determinar el otro número. Si la ratio es 5:4 y el número de la izquierda es 15, el otro número debe ser 12. Si la ratio es 5:4 y el número de la derecha es 16, entonces el número de la izquierda debe ser 20.

Las ratios normalmente no son números – son las relaciones entre dos números. Si se nos dice que tenemos que mezclar harina y azúcar en una ratio de 2:3, no se nos ha dicho cuánta azúcar y harina necesitamos. Pero cuando las ratios se usan como fracciones – cuando se quiere especificar un punto en la secuencia numérica que existe dos tercios de camino entre 7 y 8, o entre 53 y 54, entonces 2/3 es un número. En otras palabras, una fracción es una ratio considerada como número.

Las fracciones deben tratarse como los demás números. Se pueden ordenar (como en _, 1/3, _, o la secuencia más complicada _, 3/11, 1/3, 5/12, _). Al igual que los demás números, las fracciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse entre ellas o con los números enteros (con unas pocas excepciones que tienen que ver con el 0).[66] La flexibilidad metódica de las fracciones dentro del sistema numérico es otro aspecto importante de la simple y básica tecnología del recuento, donde se pone sistemáticamente una cosa detrás de otra.

Hasta ahora he estado hablando de lo que se llaman "*fracciones verdaderas*", o fracciones que son menores que uno (la distancia entre un número entero y el siguiente). Los números mayores que uno también se pueden escribir de forma fraccional (o ratio), por ejemplo 4/3 o 231/16. Las fracciones que son mayores (o iguales) que uno se les llaman fracciones "*mixtas*". Se pueden "*reducir*" a números enteros y a sus partes fraccionales, convirtiéndose 4/3 en 1 1/3, y 231/16 en 14 7/16, que a su vez es 64/16, 4/1 o lo que es lo mismo, 4.

En resumen, una fracción es una ratio o proporción de la distancia numérica entre un número y el siguiente. Por sí misma, 1/7 es una séptima parte de la distancia numérica entre 0 y 1. El número 4 1/7 es cuatro más una séptima parte de la distancia numérica entre 4 y 5.

El lenguaje y otros problemas conceptuales

No siempre es fácil considerar las fracciones como números individuales. Esto se debe en parte

66.- Existe una restricción inexorable en las fracciones. Se les puede considerar ratios o proporciones entre dos números enteros, sin importar si son positivos o negativos – siempre que ninguno sea cero. Es una operación ilícita en matemáticas dividir cualquier número por cero porque no existe modo de computar el resultado. Por lo tanto no se puede tener una fracción como 1/0 o 5/0. No tiene sentido dividir entre cero, por lo que matemáticamente hablando no está siquiera permitido considerar esa posibilidad. Tampoco se pueden tener fracciones como 0/1 o 0/5, porque nada dividido por algo es igualmente impensable. Por supuesto, la misma restricción se aplica a las ratios; nada puede ser proporcional a 0.

a los problemas con el lenguaje, debido a las complejidades conceptuales a la hora de tratar las cantidades fraccionales. En los siguientes ejemplos consideraremos solamente las fracciones positivas, que ya son lo suficientemente complejas. Pero cualquier cosa que se pueda hacer con los números enteros negativos se puede igualmente hacer con las fracciones negativas, en ocasiones con consecuencias tan bizantinas (excepto desde el punto de vista matemático) que evitaré cualquier referencia a ellas.

La suma de las fracciones no es difícil de comprender, aunque sea complicada de realizar. Sumemos dos o más fracciones y obtendremos una fracción mayor, como se puede demostrar con las porciones de un pastel. Y la fracción se reduce si le restamos una fracción, como sucede en la experiencia cotidiana.

Pero la multiplicación es un problema. Normalmente esperamos que las cosas se hagan más grandes cuando se multiplican. Dos multiplicado por dos es cuatro, un número mayor. Pero un medio de un cuarto (_ x _ = _), una cantidad menor.

La división por fracciones quizás sea todavía peor. Una fracción dividida por otra fracción da como resultado un número mayor. Normalmente no esperamos que las cosas que dividimos sean mayores. Por lógica puede parecer razonable que haya dos cuartos en un medio – pero la división de un medio por un cuarto (_ ÷_ = 2) desafía cualquier cosa salvo la imaginación matemática.

Una simple división con números enteros, como 4 ÷ 2 =2 se expresa más o menos así: "*dividimos cuatro caramelos entre dos niños y cada uno toca a dos caramelos*". Pero si dividimos medio caramelo por medio – si es que es posible – el resultado sería un caramelo completo.

La mayoría de las personas son capaces de comprender que los números enteros divididos por sí mismos siempre tienen como resultado el valor de 1: 2 ÷2 =1; 14 ÷14 = 1; 82 ÷ 82 = 1. Pero esta comprensión no es fácil de trasladar a los números que son menores de 1. No resulta tan obvio que _÷_= 1, que _÷_= 1, o que 1/82 ÷ 1/82: 1. Esto tiene sentido solamente en la parte matemática del muro de cristal, en ninguno otro sitio más.

No es de extrañar que muchas personas nunca comprendan del todo las "*operaciones*" relacionadas con la multiplicación y la división de fracciones. Pueden aprender los rituales necesarios para lograr hacer un examen, pero lo que no tiene sentido raras veces se retiene por mucho tiempo. ¿De qué sirve recordar algo que no tiene sentido alguno?

No es que esas personas no hayan aprendido nada en la escuela, sino que han aprendido lo incorrecto. Han aprendido a esperar que el resultado de una multiplicación es siempre algo mayor y que el de la división siempre resulta algo menor. Lo han aprendido de innumerables lecciones y demostraciones en el aula. Y todo parece intuitivamente obvio – hasta que tienen la necesidad o el deseo de pensar matemáticamente.

Aunque las fracciones son números, existen dos diferencias principales entre el sistema de los números enteros y el de los secundarios que se dedican a cubrir los huecos. La primera diferencia es que la distancia entre un número entero y el siguiente es fija: es "*uno*". La distancia entre dos números adyacentes cualesquiera, como el 5 y el 6, o el 595 y el 596, es siempre uno, y siempre es obvio cuál de los dos números, adyacentes o no, es el mayor. Sin embargo, la distancia entre dos fracciones adyacentes es variable. Es necesario calcularla. La distancia entre 2/3 y 3/5 es 1/5. La distancia entre 2/23 y 3/23 es 1/23, que es mucha menos distancia que la que existe entre 2/5 y 3/5.

La segunda gran diferencia entre los sistemas de números enteros y las fracciones es que mientras que el conjunto de números enteros no tiene fin, las fracciones no son tan homogéneas como lo son los números enteros. Si estamos tratando con tercios, existen tres entre dos números enteros adyacentes, ni más ni menos. Si se trata de séptimos, entonces siete es el límite. En efecto tomamos una decisión arbitraria al dividir el espacio entre números enteros adyacentes en un número fijo de partes, y ese es el total con el que tenemos que trabajar. Las fracciones tienen una existencia limitada.

Es imposible hablar de la mayoría de fracciones, ni siquiera pensar en ellas, con la facilidad que lo hacemos con respecto a los números enteros. Normalmente no es difícil comprender que _ es mayor que 1/3, a pesar de que 2 no es mayor que 3. Esto se puede hacer con tartas. Pero es mucho más difícil pensar en fracciones como 4/5 y 7/9. Al momento no se puede saber cuál de las dos es mayor, con la misma rapidez que se sabe que 9 es mayor que 7.

Finalmente, existe un abismo entre el lenguaje natural y el matemático. La palabra "*fracción*" raras veces se usa en el lenguaje cotidiano, y con ningún sentido matemático. Podemos referirnos a una "*fracción*" de una tarta en vez de decir lo usual, un "*trozo*", una "*porción*", pero solamente cuando el trozo es relativamente pequeño. En matemáticas una fracción puede ser casi tan grande como un entero, como 9/10 o 99/100. Cualquiera que tome tres cuartas partes de un pastel y diga que ha tomado "*solamente*" una fracción, puede enfrentarse a una discusión.

FRACCIONES DECIMALES

Todavía no hemos terminado con las fracciones. Existe un tipo particular de fracción que destaca por el tratamiento especial que se le da en las matemáticas, y a todos nos resulta familiar en su forma camuflada. Es la fracción cuyo denominador es 10 o potencia de 10.

Las fracciones como 1/10 y 1/100 no solamente se usan con fines especiales, sino que su apariencia cambia radicalmente. La fracción 1/10 se rescribe como 0,1; y 1/100, como 0, 01. Las formas alternativas son familiarmente conocidas como decimales. Formalmente se conocen como "*fracciones decimales*", un término que revela su procedencia.

El cambio de 1/10 al formato de 0,1 permite que se introduzca una nueva dimensión en el mundo de los números. De cualquier modo, todo se adecua al modelo general de matemáticas fraccionales, las que completan los huecos entre los números enteros.

Segmentar los números enteros en décimas partes

Las fracciones decimales son fracciones que no lo parecen porque parte de ellas se ha suprimido. Es necesario saber que existe un denominador, eliminado pero sobreentendido.

Las fracciones decimales se representan con números como 0,5; 0,25 y 0,05 en vez de con sus equivalentes 5/10, 25/100, 5/100.

Las fracciones decimales siempre consisten en dos partes, separadas (en algunas partes del mundo) por un punto, llamado punto decimal. (En otras partes del mundo, el punto decimal es una coma). El número a la izquierda del punto decimal es un entero, como en 4,567 o 0,123. El cero no representa nada, salvo a sí mismo, pero realiza la función del punto decimal y sirve para alinear los números para la computación.

El número a la derecha del punto decimal es la parte fraccional. Paradójicamente, el valor de los dígitos de la derecha del punto decimal varía según los que haya. En la fracción decimal 0,5, el cinco significa 5 décimas. En la fracción decimal 0,05, el cinco significa cinco centésimas, y en 0,005, la fracción significa cinco milésimas. La fracción decimal 0,555 significa quinientas cincuenta y cinco milésimas 555/1000.

La línea inferior de las fracciones decimales, el denominador, siempre se da por hecho. Y a diferencia de otras fracciones, que pueden tener cualquier número excepto cero como denominador, el denominador de un decimal tiene que ser siempre una potencia de 10. (Por eso es por lo que son fracciones decimales). La línea inferior ausente de la fracción decimal siempre se entiende que es 10, en una potencia más que el número de dígitos que hay en la parte de la derecha del punto decimal. Es decir, se entiende que 0,5 es el equivalente a 5/10, 0,25 es el equivalente de 25/100, y 0,005 el equivalente de 5/1000.

Al igual que otras fracciones, las fracciones decimales son ratios – con la parte derecha ausente pero sobreentendida. En cualquier momento el denominador ausente se puede volver a colocar si fuera necesario simplificado para mostrar que las fracciones decimales, al igual que las demás fracciones, pueden mostrar la misma ratio.

Fracción decimal	Fracción sobreentendida	Ratio	Ratio simplificada	Fracción
0,5	5/10	5:10	1:2	-
0,25	25/100	25:100	1:4	-
0,005	5/1000	5:1000	1:200	1/200

Las fra ntre los números enteros, como nidos incrustados en cada décima se encuentran diez partes o cien partes o mil partes, etc., sin fin.

Esta es una tercera dimensión en el recuento. Los números naturales saltan hacia arriba sin fin, uno sobre otro, y sobre otro. Los números negativos giran sobre el cero para extender los números naturales – llamados todos ahora enteros – en la dirección opuesta. Y ahora los decimales expanden el mismo sistema numérico en partículas más y más minúsculas.

Las fracciones decimales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse con otras fracciones decimales y con los números enteros. Se pueden colocar en orden ascendente y descendente con mucha más facilidad que las demás fracciones. No existe en el lenguaje nada remotamente similar a esta versatilidad

Las fracciones decimales ausentes

Pero siempre hay una pega. Existen muchas fracciones que no se pueden convertir en fracciones decimales (porque no se encuentra el denominador común). El decimal 0,5 es idéntico a 1/2; el decimal 0,25 es idéntico a 1/4. Pero no existe decimal equivalente para 1/3.

Desde la perspectiva decimal un tercio es 0,333.... (3/10 más 3/100, más 3/1000...), con el 3 repetido infinitamente. No nos debe sorprender que a esta fracción se le llame fracción decimal periódica.

El problema ocurre con todas las fracciones verdaderas que no tienen denominador que se pueda dividir entre 10 o una potencia de 10 y no quede resto, es decir 3, 7 y 9 y todos los números que terminen en 1, 3, 7, 9. No existen fracciones decimales no repetidas para estos números. Algunas fracciones decimales entran en una espiral y repiten bloques de dígitos, por ejemplo 1/7 = 0,142857142857...

En otras ocasiones no se puede encontrar fracción alguna, ni decimal ni de las otras. Dos antiguos problemas matemáticos han quedado sin resolver con absoluta exactitud porque ningún número entero ni ninguna fracción exacta pueden expresar la respuesta. Me refiero a la imposibilidad de hallar un valor numérico exacto para la ratio del diámetro de un círculo con su circunferencia, o para la ratio

67.- La ratio de la circunferencia de un círculo con su diámetro es el celebrado número pi (representado por la letra griega π). Pi existe en algún lugar entre 22/7 y 22/8. Si se sabe que el diámetro de una rueda es exactamente un metro, entonces se sabe que la circunferencia es – aproximadamente – 22/7 (o 3,142 metros). Se puede calcular la circunferencia con el grado de precisión que se quiera, hasta 10 o 100 o un número infinito de lugares decimales, pero nunca se puede conseguir con absoluta precisión (del modo en que podemos afirmar que 21/7 es exactamente 3) porque el cálculo de pi en sí es infinito. No se puede escapar del apuro dando arbitrariamente un valor exacto a la circunferencia de una rueda, diciendo – por ejemplo – que mide 3 metros justos. Si se hace eso se observará que no se puede calcular un número preciso para el diámetro. Vayamos por donde vayamos, nos daremos de bruces con π. Existe un dilema similar con la diagonal de los cuadrados. Imaginemos una loseta de pavimento perfectamente cuadrada, cuyos lados miden exactamente un metro. El inamovible teorema de Pitágoras dice que el cuadrado de la longitud de la diagonal debe ser igual a la suma de los cuadrados de ambos lados. Puesto que cada lado mide un metro, la longitud de la diagonal es la raíz cuadrada de uno al cuadrado más uno al cuadrado, o lo que es lo mismo, la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$). Y no existe fracción que exprese exactamente el valor de $\sqrt{2}$, que en forma decimal está entre 1,414 y 1,415. Se puede conseguir tanta precisión como se desee alargando el número de lugares decimales, pero no se puede llegar nunca a un fin. No sirve de nada duplicar la longitud de cada lado, de forma que la longitud de la diagonal sea la raíz cuadrada de 2 al cuadrado más 2 al cuadrado ($\sqrt{8}$). Ocho no tiene una raíz cuadrada exacta, ni ningún número que sea suma de 2 cuadrados iguales (por el simple hecho de que la suma de dos cuadrados iguales siempre debe contener el dos como un factor y la temida raíz cuadrada de dos no existe) una vez más el problema no puede resolverse por la puerta de atrás. No se le puede dar un número entero a la diagonal y entonces calcular la longitud de los lados. Nos encontraremos una vez más enredados en los tentáculos de la $\sqrt{2}$ e incapaces de llegar a una conclusión matemática exacta.
Los números como pi y $\sqrt{2}$ se pueden usar en cálculos (que inevitablemente terminan siendo aproximados), se pueden ordenar numéricamente junto con otros números, pero nunca pueden identificarse con precisión. Con justa razón a esos números se les llama irracionales.

de las partes de un cuadrado con su diagonal.[67]

Jugar con los porcentajes

Existe una forma de fracción decimal que es ubicua en nuestras vidas pero que raramente se le reconoce por lo que es. Los porcentajes se han colado por debajo del muro de cristal de las matemáticas al lenguaje cotidiano y se usan con bastante menos precisión de lo que las matemáticas desearían.

Los porcentajes incluso tienen su propio signo % (véase otra vez los ceros), que no representa nada matemáticamente salvo que indica que el número que le precede es una forma abreviada de fracción decimal. Cinco por ciento (5%) significan cinco centésimas de lo que sea y normalmente (matemáticamente) se escribe 0,05. Diez por ciento (10%) son diez centésimas o 0,1. Cincuenta por ciento (50%) es 50/100, o una mitad.

A veces los porcentajes se usan con relativa precisión – un 47% de la población votó en las últimas elecciones; un 32 por ciento de belgas son francófonos. En otras ocasiones el término se usa con relativa soltura – el corredor de apuestas se queda con un porcentaje de las apuestas; solamente un porcentaje de las donaciones va para la caridad. En este caso, el porcentaje significa una parte; podría ser una parte grande o una parte pequeña. Esto es lenguaje natural, no matemáticas.

Muchas personas no saben lo que el porcentaje significa matemáticamente. Pueden creer que cualquier porcentaje (como cualquier "*fracción*") tiene que ser insignificante. No comprenden que cualquier cálculo que tenga que ver con porcentajes requiere una conversión a formato fraccionario o decimal.

CAPÍTULO 11

Los números en el espacio

La palabra geometría significa medida de la tierra – pero muy poca geometría se realiza verdaderamente en la tierra. La mayoría de la geometría se lleva a cabo en el papel (o en la pizarra o en los monitores del ordenador) con representaciones abstractas de la tierra o de porciones seleccionadas de ella. Los estudiantes se inician en la geometría sobre el papel, así como con ilustraciones en los libros y con los ejercicios. Cuando exploramos el mundo geométricamente, ponemos el mundo sobre el papel – o en nuestras mentes – en forma de diagrama.

La aritmética también se hace sobre el papel, pero eso es cálculo, no representación. Las marcas que se hacen sobre el papel al calcular tienen solamente un parecido numérico con lo que se esté calculando; puede que no nos digan nada sobre el tamaño, la forma, la orientación o la cantidad de cualquiera que sea con lo que estemos matemáticamente relacionados. Pero la geometría es diferente.

La geometría en ocasiones se lleva a cabo en el sitio, de primera mano. La medición directa de las dimensiones y ángulos de un terreno, de un edificio o una pieza de carpintería es un modo práctico de realizar cálculos y de tomar decisiones laborales. Los supervivientes y los marineros calculan la posición directamente de las señales o de los cuerpos celestes con los que se relacionen. Pero la observación directa unas veces no es conveniente y otras veces es imposible. Normalmente la geometría no trata con la realidad física, sino con representaciones idealizadas o abstractas de ella. Se ocupa del espacio.

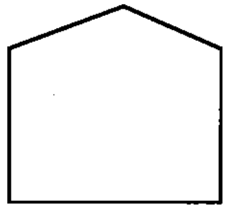
La transferencia de la geometría desde el espacio al papel o a otro tipo de superficie plana permitió a los matemáticos estudiar las propiedades de las formas geométricas. Los geómetras ya no estudiaban la tierra o los cielos; estaban estudiando la geometría en sí. Todos los celebrados "*teoremas*" sobre geometría de Euclides – después de 2300 todavía se consideran merecedores de estudio en los institutos y por los matemáticos profesionales – se basan en el examen de las formas sobre el papel, y están "*probados*" racionalmente más que por capricho de la naturaleza.

Hasta hace unos 400 años, la geometría era algo que tenía que parecer lógica a simple vista. Y hoy día ocurre lo mismo, y eso dista mucho de ser fácil. En realidad, que la geometría sea lógica depende del punto de vista.

Una cuestión de perspectiva

La naturaleza abstracta de los diagramas geométricos con frecuencia causa problemas de comprensión. Las figuras geométricas no se parecen mucho a lo que se supone que representan, e incluso cuando existe el parecido, es desde el punto de vista más inusual. El mundo desde un punto de vista geométrico es bastante diferente de la forma en que normalmente lo percibimos.

El problema no es que la reducción a escala y los diseños de objetos sean difíciles de reconocer. Los niños no tienen dificultad alguna en ver que la figura siguiente representa una casa.



(Fig. 11.1)

Ni siquiera tienen problema para ver que un rectángulo podría ser una casa, especialmente si se le incluye una rudimentaria puerta o ventana.

(Fig. 11.2)

(Después de todo, los niños no tienen dificultad alguna en imaginar que un bloque de madera con el que están jugando es una casa, una mesa o un coche).

Pero a los niños – y a muchos adultos – les cuesta trabajo entender que esa misma figura representa el plano de una casa, o de una habitación, o que representa un aparcamiento o un terreno. La dificultad no es la representación, es la perspectiva.

(Fig. 11.3)

No podemos ver (a menos que vayamos en un avión) los campos o cualquier otro rasgo terrestre desde arriba. Los niños no tienen problema con los dibujos, incluso si son muy esquemáticos, pero sí tienen problema con los puntos de vista inusuales. Todos los tenemos. La interpretación cartográfica exige entrenamiento y experiencia. Los aviadores no ven las islas de la misma manera que lo hacen los marineros. Preferimos ver las representaciones del mundo de la misma forma que vemos el mundo, de la forma en que los ojos están localizados en el cerebro – mirando hacia el horizonte. La geometría normalmente no nos da esa oportunidad.

Existe otro hecho poco natural en el punto de vista geométrico (y en la interpretación cartográfica). Prescinde de la perspectiva, que no es algo a lo que el cerebro y los ojos humanos están acostumbrados.

La perspectiva no es algo que la geometría ignore deliberadamente; es imposible que la representación geométrica la incluya (aunque la perspectiva puede calcularse geométricamente). La geometría puede representar figuras en una o dos dimensiones sin dificultad alguna, como en el caso de los diagramas anteriores de una casa. Pero no puede representar objetos en tres dimensiones en una sola figura (a menos que la distorsión sea parte de la figura geométrica). La siguiente figura geométrica de un cubo tiene distorsiones geométricas en ambos lados:

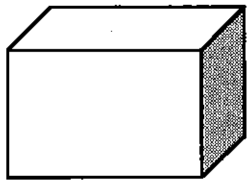


Figura 11.4

Ni la parte superior ni el lado de la figura 11.4 son una representación fiel de la cara cuadrada de un cubo.

La situación es mucho más complicada porque la geometría no está verdaderamente relacionada con la sustancia sólida, de objetos o porciones de la tierra, ya sean reales o imaginarios. La geometría tiene que ver solamente con el espacio. E irónicamente, no podemos ver el espacio, ni en la realidad ni en un diagrama geométrico. Por lo tanto, se deben poner líneas artificiales alrededor del espacio geométrico, aunque las líneas no tienen realidad física ni matemática.

Figura 11.5

Cuando se nos dice que la figura 11.5 representa una extensión de terreno, el terreno no son las cuatro líneas, sino el espacio de su interior. Las líneas en sí no representan ninguna realidad física o geométrica, sino el espacio entre los ángulos del terreno. (Incluso si el terreno está rodeado por una valla, las líneas de la representación geométrica muestran el perímetro abstracto a lo largo del que la valla se supone que está colocada, no la valla en sí). La distancia entre una señal y otra, en un mapa o en un diagrama geométrico, no es en absoluto sustancial – es el espacio. La diferencia angular entre dos puntos de compás es la medida de la parte de espacio comprendida entre dos puntos.

Por problemas puramente geométricos, que tienen que ver con triángulos, círculos y otras figuras delimitadas, el interés siempre radica en el espacio, bien sea la distancia entre un punto y otro, las distintas direcciones que las distancias entre puntos puedan tener o los ángulos entre ellas. Las líneas que se trazan en una figura geométrica están allí solamente para delinear (literalmente) los límites y otras características de un trozo de espacio.

Nos quedamos con la extraña situación de que el modo en que normalmente vemos el mundo no es el mismo en el que encontramos sus representaciones en la geometría, y la perspectiva geométrica no es algo con lo que nos encontremos en el mundo que nos rodea. Observamos, una vez más, que las estructuras matemáticas se pueden entender solamente desde dentro de las matemáticas. La única forma de entender las figuras geométricas es desde el punto de vista de las figuras mismas, con ojos de geómetra.

La geometría y los mapas

No es sorprendente que el desarrollo de la geometría en la historia humana haya ido estrechamente unido al desarrollo de los mapas. Tanto la geometría como la cartografía implican un mismo reto conceptual – ver el mundo, o parte de él, desde lo que David Olson llamó "*la visión desde ningún lugar*" (1994, p. 201).[68] En realidad, a veces es difícil decidir si las primeras representaciones de las regiones de la tierra son mapas o diagramas geométricos.

Los primeros mapas, donde no había medida alguna, tenían las distancias indicadas in situ. Esto es especialmente visible en las antiguas cartas de navegación,[69] que frecuentemente tenían las áreas marítimas entrecruzadas con líneas que representaban cursos y distancias por las que navegar o líneas a seguir en determinados periodos de tiempo.

Lo mismo se aplica a la geometría simple en la actualidad. Un triángulo puede tener la longitud de los lados y de los ángulos directamente representados en la figura:

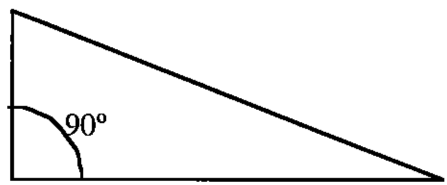


Figura 11.6

Las partes no tienen que tener una longitud exactamente de tres, cuatro o cinco unidades, ni tienen que estar perfectamente dibujadas a escala, y los ángulos no tienen que ser tampoco muy precisos (especialmente en el caso de "*dibujos a mano alzada*"). La geometría no está en la figura en sí, sino en los números.

ENTRE FIGURAS Y NÚMEROS

A principios del siglo XVII el filósofo y matemático francés Descartes tuvo una idea que revolucionó tanto los mapas como las matemáticas. Trasladó tanto los diagramas geográficos como los geométricos a marcos numéricos. Las escalas numéricas en la parte inferior e izquierda de un diagrama geométrico o de un mapa se conocieron como coordenadas y a toda la imagen matemática se le conoció como gráfico. Descartes transformó el pensamiento matemático con la idea de que no era necesario que la información sobre las dimensiones y los ángulos de las figuras geométricas fuese colocada en la misma figura si la figura estaba apropiadamente localizada en un gráfico. El espacio geométrico se podía reducir a números, así como la localización de los rasgos físicos de la tierra podí-

68.- Para una breve historia de los mapas, ver el capítulo 10 de Olson (1994), cuyo título, *The world on Paper* (*El mundo en papel*) sugirió el encabezamiento de esta sección. La frase de Olson, "*la visión desde ningún lugar*" fue el título de un libro anterior de Thomas Ángel (1986).

69.- "*Mapa*" normalmente se refiere a la representación de áreas de tierra del mundo, o del mundo entero. "*Carta*" es la palabra que representa zonas de agua y las líneas de costa que las rodean, o para expansiones de espacio. Los navegantes, aviadores y astronautas usan cartas; la gente que viaja por la superficie terrestre usa mapas.

an reducirse a números que indicaban la latitud y la longitud.

Las coordenadas que aparecían en la parte inferior y en la parte izquierda del borde de un mapa representaban la posición sobre la superficie terrestre (a veces, las coordenadas se repiten en la parte superior y derecha del mapa, pero solamente por cuestiones de conveniencia; no porque eso implique información adicional).

Circunvalar el mundo con números

He aquí un mapa en miniatura de una isla mítica, con las coordenadas de latitud y longitud indicadas en la parte inferior e izquierda respectivamente:

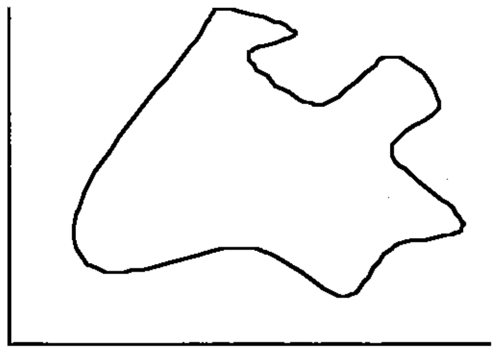


Figura 11.7

Las coordenadas permiten localizar con precisión cualquier punto en el mapa y – una vez se haya determinado la escala del mapa – permiten calcular la distancia entre dos puntos del mismo. La idea de colocar coordenadas alrededor del borde del mapa, algo obvio en là actualidad, costó mucho tiempo llevarlo a cabo debido al problema que suponía representar el globo terráqueo completo, o partes de él, en una superficie plana. Ese es un problema geométrico para el que nunca se ha encontrado una solución simple y multiuso, aunque afortunadamente el problema se puede ignorar en el caso de áreas relativamente pequeñas como son las ciudades, los países de tamaño moderado o las islas míticas.

En geometría, todo se puede calcular así:

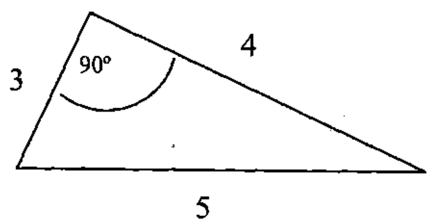


Figura 11.8

o así:

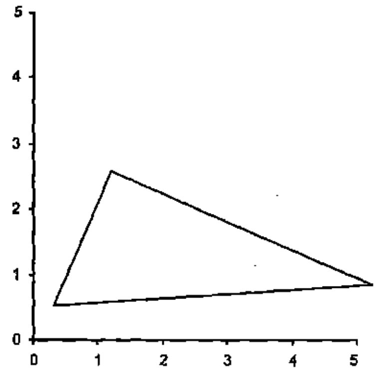


Figura 11.9

donde las coordenadas representan la localización en el espacio numérico. Un par de coordenadas indicarán un punto en el espacio – por ejemplo, (1,2) indica una unidad en la escala x y dos unidades en la escala y. Dos pares no solamente indicarán la posición de una línea – (1, 2), (2, 3) que significan desde (o a través) de (1, 2) a (2, 3) – pero también podrían ser la base para calcular la "inclinación" de la línea – el ángulo que hace con respecto a la coordenada horizontal de la parte inferior. Y tres pares de coordenadas indicarán – (1, 2), (2, 3), (5, 1) – indicarán un triangulo completo y único, con todas sus dimensiones y ángulos susceptibles de ser calculados.[70]

La idea de Descartes de que las formas geométricas se podían expresar con números y fórmulas algebraicas unificó la geometría y las matemáticas. Demostró que el diagrama geométrico – la representación del mundo en el papel – era esencialmente superfluo. Se demostraba ahora que todas las verdades sobre las formas geométricas, una vez justificadas visualmente, eran consecuencia de la consistencia de los números. Incluso en el mundo de las figuras mandan los números. (El mismo hecho se demuestra cada vez que se usa una calculadora para solucionar un problema geométrico. Un constructor que quiere calcular el grado de inclinación de un tejado o el área de un muro no necesita poner un diagrama en la calculadora; solamente se requieren los números relevantes).

Pero como veremos, la demostración de Descartes de que toda la geometría se puede reducir a números no hizo que los matemáticos dejaran de usar el papel. Todo lo contrario; la demostración además mostró que las relaciones entre números podían representarse gráficamente. Los gráficos se convirtieron en mapas de paisajes numéricos, con modelos inherentes que nuestros cerebros esencialmente no numéricos apenas podían entender y ni siquiera de los números en sí se podía sospechar.

Las subestructuras de las matemáticas se abrieron al ojo humano al igual que la comprensión de cómo un mapa geológico, o una carta de la temperatura de los océanos, pueden revelar detalles y estructuras de aspectos del mundo físico hasta ahora insospechados e inaccesibles.

El poder matemático de los gráficos resultó ser mucho más que un logro conceptual. Se podría decir que la consolidación sobre el papel de aspectos geométricos y numéricos de la computación hizo posible gran parte de los desarrollos científicos y tecnológicos de los siglos venideros.

FUNCIONES

A lo largo de este libro he hablado de las relaciones entre números – los modelos sin fin en el

70.- A fin de que los números sean lo más simple posibles, he usado coordenadas en el ejemplo del triangulo de la figura 11.9 que no corresponden al triangulo de la figura 11.8. Harían falta unos valores más precisos.

tapiz de los números – como la base de todas las matemáticas. Es tiempo de considerar cuántos tipos diferentes de modelos se pueden reunir para que los estudiemos, los comprendamos y nos sirvan, dentro de la compacta forma de funciones.

También es tiempo de introducir una pequeña parte de notación matemática formal que es posible que quede fuera de la experiencia de algunos lectores, el tipo de exotismo matemático que con frecuencia es fuente de ansiedad y alarma. Aún así, la notación básica de las funciones es concisa, expresiva e inmensamente poderosa. No es nada más que:

$$Y = f(x)$$

donde y es un número y f es un indicador de que los paréntesis contienen un modelo numérico particular que implica otro número, x. (se han usado letras del alfabeto, pero eso no es lenguaje; es habla matemática).

El modelo que representa f (x) se llama formalmente la función de x, o, más precisamente, la "*efe de x*". El enunciado $y = f(x)$ dice que el valor de y siempre está determinado por el modelo de f(x). Digamos que el modelo f(x) es simplemente $x + 2$. Entonces cuando $x = 1$, y será 3 (1 + 2). Cuando $x = 2$, y será 4 (2 + 2). Y cuando $x = 259$, y será 261 (259 + 2).

Las funciones reflejan con exquisita economía el rico tapiz de los modelos numéricos que existen detrás del muro de cristal. Esto es todo lo que el lector necesita entender. Algunos de los ejemplos se encontrarán en las notas a pie de página.[71]

Los matemáticos debaten entre sí sobre si las funciones deberían considerarse reglas, listas, enunciados de relaciones o simplemente otro tipo de números. Las funciones se comportan como números – pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse – pero también hacen otras cosas. No existe razón para argumentar con palabras sobre los puntos más sutiles de las funciones; las funciones son conceptos matemáticos, no lingüísticos.[72]

FUNCIONES Y GRÁFICOS

Descartes no solamente revolucionó la geometría con su conceptualización de los gráficos; además exploró las funciones matemáticas, dándoles incluso un nombre. Por eso no sería de extrañar

71.- Podríamos compilar una lista que diga con mucho mayor extensión exactamente lo mismo que $y = f(x)$ cuando $f(x) = x + 2$ (los puntos significan que la serie continúa):
cuando x = 1 2 3 4......259......x
y = 3 4 5 6 ......261......x + 2
tanto la lista como la función representan el modelo matemático establecido al añadir 2 a cada número. Obviamente, la notación funcional es más concisa y ordenada; dice todo lo necesario y no hay nada irrelevante.
Las funciones se pueden complicar tanto como uno quiera (y en verdad muchas de las funciones con las que tratan los matemáticos son realmente complicadas). He aquí una función relativamente simple que describe el modelo por el que las millas se relacionan con los kilómetros:
$Y = f(x) = 1,6\ x$
(donde y = distancia en kilómetros y x = distancia en millas)
en forma de lista:
cuando x (distancia en millas) = 1 2 3 ......259... x
y = (distancia en kilómetros) = 1, 6 3, 2 4, 8......414,4...1, 6x

y aquí tenemos una función algo más complicada que relaciona grados centígrados con grados Fahrenheit:
$y = f(x) = 9/5\ x + 32$

Así, si $x = 0$ (cero grados centígrados o punto de congelación), entonces $f(x) = (9/5 \times 0) + 32$, lo que da como resultado (ya que cualquier cosa multiplicada por cero es cero) 32, que por supuesto es el punto de congelación en la escala Fahrenheit. Y si $x = 100$ (100 grados centígrados o punto de ebullición), entonces $f(x) = (9/5 \times 20) + 32 = 36 + 32 = 68$ grados en la escala Fahrenheit (ver figura 11.n2.)
Existen algunas restricciones con respecto a los modelos numéricos que pueden ser funciones, pero ese detalle lo dejaremos para los matemáticos. Se pueden usar otras letras del alfabeto para representar variables y otras letras, además de la f, para indicar funciones cuando se consideran más de una (aunque f se usa invariablemente como la primera o la única función).
72.- DAVID BERLINSKI (1997), quien escribe con mucha elocuencia sobre el cálculo, dice que no obstante "*las matemáticas no son palpables*" (p. 67); no se pueden poner en palabras. Su particular ejemplo: no se puede decir qué es una función y no se puede decir qué hace una función; es lo que hace y hace lo que es.

que fuera además pionero en trazar funciones en gráficos – poner modelos numéricos en papel.

He aquí un gráfico de la función f(x) = x + 2 que ya hemos discutido:

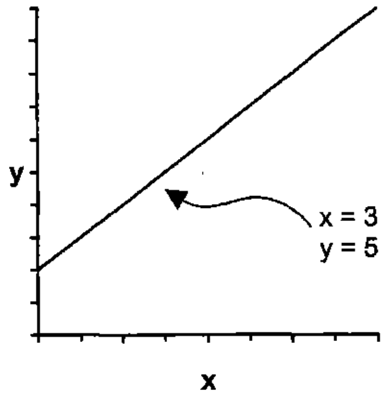
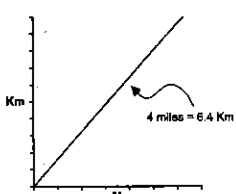


Figura 11.10

El eje vertical de la izquierda es el eje y. representa los posibles valores de y. El eje horizontal en la parte inferior representa los posibles valores de x. Por supuesto, el gráfico no está completo. Representa solamente una porción del número infinito de valores de f(x). De modo incidental las líneas de los gráficos se llaman normalmente curvas, incluso cuando son rectas. Representan las localizaciones potenciales en el espacio numérico. Al igual que un tren puede aparecer en cualquier lugar de la vía férrea, pero en ningún otro sitio, del mismo modo los valores de una función pueden aparecer solamente en la curva de su gráfico. En las notas a pie de página aparecen dos ejemplos más.[73]

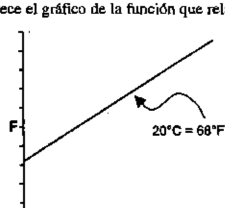
Como ejemplo final de cómo las relaciones entre números facilitan la comprensión del mundo, vuelvo a la asignatura de trigonometría en secundaria y a las familiares pero a menudo confusas ratios – los senos aritméticos. Las víctimas de la trígono fobia pueden tranquilamente saltarse esta sección

73.- He aquí un gráfico de la función que relaciona millas con kilómetros, f(x) = 1,6x:



(insertar figura 11.n1)

y aquí aparece el gráfico de la función que relaciona grados centígrados con grados Fahrenheit, f(x) = 9/5x + 32:



(insertar figura 11.n2)

del capítulo.

Trigonometría

Los estudiantes normalmente aprenden que los senos (y otras ratios trigonométricas que no se considerarán aquí) son relaciones entre las longitudes de los lados y el tamaño de los ángulos en triángulos de ángulo recto. Pero más que tener que ver con dimensiones particulares, la trigonometría se centra en las ratios. Las ratios permanecen constantes. Los triángulos con lados de longitud (2, 3 y 5); (4, 6 y 10); (8, 12 y 20) y (5000, 7500 y 12.500) se diferencian en el tamaño pero sus ángulos y los tamaños relativos son siempre los mismos. Geométricamente, son el mismo triángulo.

Dado el seno u otras ratios trigonométricas determinadas, se puede buscar en una tabla de funciones trigonométricas (o en una calculadora que esté programada para tales funciones) el valor de un ángulo desconocido. A partir de la ratio trigonométrica y de la longitud de un lado, se puede calcular o buscar la longitud de los otros lados. Y a partir de un ángulo, se puede calcular o buscar el seno y otras ratios trigonométricas.

Partiendo de estas funciones trigonométricas permanentes se pueden calcular todos los comportamientos de estos elementos, incluyendo el tamaño de objetos distantes (bien sea árboles o las galaxias del espacio exterior), la distancia que los separa de nosotros y la velocidad y dirección de cualquier movimiento que pudieran hacer. Durante cientos de años las ratios trigonométricas han sido la base de la astronomía, la supervivencia, la elaboración cartográfica, la ingeniería y la navegación en la tierra, los mares, los cielos y el espacio.

Veamos lo que ha ocurrido. Los números se han extendido por el espacio y por tanto se han descubierto todo tipo de cosas sobre los objetos del espacio. Solamente los números han permitido que esto ocurra. Algunas de las representaciones geométricas se han realizado sobre el papel, pero solamente para facilitar la visualización de las relaciones que se están examinando. El cálculo, y el descubrimiento, están en los números.

La moderna ayuda a la navegación llamada global positioning system (GPS) (sistema de posición global) permite a cualquiera, bien vaya a pie o en cualquier tipo de vehículo o embarcación, determinar con precisión un posición concreta en la tierra, la velocidad y la dirección del viaje y la distancia al destino. El pequeño receptor que se usa calcula la orientación de los satélites que constantemente circulan por el globo, haciendo uso instantáneo de la trigonometría.

¿He dicho determinar con precisión una posición concreta en la tierra? Quería decir posición en el espacio. El hecho de que el receptor GPS se encuentre en la tierra es una coincidencia. Los satélites en órbita hacen girar una vaina invisible de espacio numérico alrededor del mundo, junto con una vaina invisible de tiempo numérico. Debido a las masas y a las irregularidades de la superficie terrestre y al paso de la tierra a través del tiempo, siempre es necesario hacer pequeñas correcciones locales. Pero las correcciones adaptan la tierra a los números, no los números a la tierra. Todo el mundo vive y se mueve en un mundo envuelto en números.

CAPÍTULO 12

Memorizar, calcular y consultar

¿Son las matemáticas algo que conocemos o algo que hacemos? Son las dos cosas – las matemáticas son en parte hechos y en parte actos. Y no existe una línea divisoria clara entre ambos. Más bien, existe una interrelación. Cuando hacemos una excursión al mundo de las matemáticas, cuánto más sabemos, menos tenemos que hacer, y cuanto más podemos hacer, menos necesitamos saber. Decidir qué es lo preferible en cada circunstancia ha sido un constante enigma para matemáticos, educadores y diseñadores de instrumentos científicos.

Saber es algo relativamente simple, pero no siempre fácil. Hay que poner algo en la memoria (aprender) y sacarlo cuando es necesario (recordar). Para hacer algo tenemos dos posibilidades. Podemos determinar lo que queremos saber (que implica saber cómo comenzar a determinarlo). Esto es lo que normalmente se conoce por calcular, y puede resultar laborioso. O podemos consultar lo que queremos saber, que significa usar un conjunto de tablas o manipular un ábaco o una regla de cálculo, aunque en la actualidad es más probable que se use una calculadora o un ordenador. Y existe otra categoría que entra dentro del apartado de "*consultar*", incluso si el lenguaje resulta un poco contradictorio, y es el antiguo y honorable procedimiento de pedir a alguien que nos diga lo que queremos saber.

Obviando todos los aspectos del conocimiento matemático, cálculo o consulta, es el ineludible aspecto de la comprensión el único modo de no chocar contra el muro de cristal.

Atajos

Una manera de mirar a las matemáticas es considerarlas un sistema complejo de atajos. En principio, todo lo que las matemáticas nos permiten saber y hacer se podría hacer sin las matemáticas. Solamente con el recuento – siempre que no nos quedemos sin tiempo, memoria, paciencia y cerebro. Al igual que el pastor apócrifo, podríamos solucionar todos los problemas de suma, resta, multiplicación y división moviendo ovejas o cualquier otro tipo de cuantificador más apropiado. Pero en lugar de esa dura tarea, podemos confiar en la memoria, calcular o consultar lo que queremos saber.

Consideremos un simple e hipotético problema que podemos desarrollar en este capítulo. Nos gustaría saber cuánto es 14 x 14. Existe un modo no matemático de solucionar el problema. Podríamos colocar 14 montones de 14 piedras y contar todas las piedras para averiguar su total.

No existen matemáticas algunas en ese procedimiento, ni como hecho ni como acto, nada más que un recuento. Incluso no hace falta que el resultado – 196 – sea matemático, puesto que los números por sí solos no tienen propiedades matemáticas. El recuento es la forma original de resolver problemas aritméticos por la fuerza bruta, que con frecuencia los niños usan de forma espontánea. El recuento no exige ninguna comprensión de las relaciones matemáticas, salvo conocer la secuencia numérica. La memoria, el cálculo y la consulta son las alternativas – atajo, y la cantidad de comprensión matemática que requieren varía desde un mínimo hasta una inmensidad.

LA MEMORIA

La memoria, al igual que la comprensión, es inevitable en las matemáticas y en cualquier otro procedimiento. Aunque las matemáticas puedan parecer un proceso constante de "*determinar las cosas*", la base de cualquier tipo de empresa matemática es la memoria, y una gran parte del aprendizaje de las matemáticas supone aprender de memoria hechos y procedimientos matemáticos. La memoria facilita el camino a las matemáticas, y sin ella no podemos comenzar.

El primer y más significativo paso para convertirse en matemático es memorizar, en su orden convencional, los números del uno al diez. Estos números son los bloques de construcción de todas las matemáticas y no son algo que se pueda determinar por uno mismo o consultarlo cuando lo necesitemos. Se deben conocer.

Por delante y por detrás de la tabla

El siguiente paso en un desarrollo matemático individual es normalmente "*la tabla*" – para sumar y multiplicar. No me estoy refiriendo a las tablas impresas con columnas de números ordenados en un modo sistemático como sustitutos de la memoria, sino a grupos de conocimiento que deben memorizarse, a veces en grandes porciones pero con frecuencia en poco tiempo.

En este sentido, las tablas son simplemente formas organizadas de recordar hechos matemáticos. Normalmente se presentan en forma de una cantinela, que nos ayuda a memorizar. Así:

Una más una son dos, dos más una son tres, tres más una son cuatro, etc. Seguido de:

dos más uno son tres, dos más dos son cuatro, dos más tres son cinco, dos más cuatro son seis, etc. Y:

Tres más uno son cuatro, tres más dos son cinco, tres más tres son seis, etc

Tabla de sumar

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

La tabla de sumar suele llegar hasta el diez – diez y diez son veinte – haciendo un total de 100 "*hechos matemáticos*" básicos, ilustrados anteriormente. Una vez memorizados, estos hechos están inmediatamente disponibles para su uso matemático. Es decir, siempre que se haya comprendido la naturaleza de los hechos y su modo de uso – algo que requiere a su vez memorización.

Las tablas de multiplicar se suelen recitar y aprender del mismo modo:

Una por una es una, una por dos es dos, una por tres es tres, etc.

Seguido de:

Dos por una es dos, dos por dos son cuatro, dos por tres son seis, etc.

Y:

Tres por una es tres, tres por dos son seis, tres por tres son nueve, etc.

Una vez más, las tablas suelen llegar al diez – diez por diez son cien. La tabla de multiplicar, que aparece a continuación, contiene otros 100 hechos, un total – junto con la tabla de sumar – de 200 hechos que se deben memorizar antes de que comience el cálculo aritmético.

Tabla de multiplicar

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Es posible que las tablas no resulten sorprendentes, no más que un juego de niños, pero contienen una importante cantidad de información útil y un alto grado de estructura relacional. Unas pocas rimas simples guardan un borrador detallado de los principios básicos de las matemáticas, como muestran las ilustraciones anteriores. (Las tablas, tal y como aparecen en la ilustración, no son algo que deba memorizarse. muestran lo que se ha aprendido si se conocen las cantinelas de la suma y la multiplicación).

Muchas relaciones matemáticas y geométricas fundamentales están integradas en los modelos de estas tablas, cuando los números se leen horizontalmente, verticalmente, diagonalmente o de forma aleatoria.[74] Estos grupos de números probablemente son la mejor ilustración de la riqueza básica de las matemáticas.

En su forma más simple, estas tablas de "*hechos matemáticos*" elementales reemplazan los cálculos con números menores de 10 – problemas como 4+5 o 6-7 – que de otra manera se deberían resolver con el uso de los dedos o con otro tipo de cuantificadores. Al método de los dedos se le puede llamar solucionar problemas "*por detrás de la tabla*". Pero las tablas memorizadas son esenciales para los cálculos que requieren números mayores de diez o "*por delante de la tabla*". Si no conocemos las tablas de sumar y multiplicar hasta el 10, no seremos capaces de hacer cálculos que requieran números mayores del 10, como 19+37 o 14 x 78. Lo mismo se aplica para la resta y la división. Si no somos capaces de realizar estos cálculos tan elementales no seremos capaces de hacer nada en las matemáticas. La importancia de las matemáticas radica en las tablas.

Procedimientos y fórmulas

No son solamente las tablas las que se tienen que memorizar. Existen otros tipos de procedi-

74.- Véase, en la tabla de sumar, cómo las diagonales partiendo de la parte superior izquierda hacia la inferior derecha se incrementan de dos en dos (4, 6, 8… 5, 7, 9…) mientras que las diagonales desde la parte superior derecha hacia la inferior izquierda permanecen constantes (4, 4, 4… 5, 5, 5…), que sugiere una rigidez en la estructura de las relaciones de la suma que casi resulta tangible. La diagonal principal de izquierda a derecha (2, 4, 6…) es la tabla de multiplicación del dos, mientras que la tabla de multiplicar del tres se encuentra en otra de las diagonales (3, 6, 9…). Cada uno de los números desde el 1 al 20 parecen tener una sólida colocación, nítidamente presentados – sin excepción alguna – en la línea de los 10 en la diagonal principal ascendente de izquierda a derecha. Por otro lado, la tabla de multiplicación está llena de agujeros. No hay rastro en esta lista de un número primo mayor que 2 (como 3, 5, 7, 11, 13, 17…) como si la tabla de multiplicar fuera una criba que excluyese números primos. En realidad, una de las formas en las que los matemáticos (y los ordenadores) calculan los números primos es a través del antiguo procedimiento conocido como la criba de Eratóstenes. Los números interesantes se encuentran con facilidad en el tejido de la tabla de multiplicar, que incluye los cuadrados (en la diagonal principal que va desde la parte superior izquierda a la parte inferior derecha – 1, 4, 9, 16…). Sigamos cualquier diagonal en dirección ascendente de izquierda a derecha y veremos que los números ascienden y después descienden (8, 14, 18, 20, 20, 18, 14, 8), mientras que las diagonales en dirección descendente de izquierda a derecha se incrementan en una progresión estable (4, 10, 18, 28, 40, 54…).

mientos que también deben comprenderse y retenerse en la memoria, comenzando con la suma y la resta de dígitos múltiples y posiblemente con las multiplicaciones y divisiones de cifras largas. Y existen además todo tipo de fórmulas, aritméticas, geométricas y algebraicas, desde las más conocidas hasta las más abstrusas, que se consideran parte del conocimiento de cualquiera que se suponga está familiarizado, o quiere estarlo, con las matemáticas a determinados niveles de competencia.

Todo procedimiento y toda fórmula es un atajo para solucionar una relación matemática. Si no se conoce el procedimiento y la fórmula apropiada para cada ocasión en particular, es muy probable que sea necesario realizar un mayor trabajo computacional, con la posibilidad de conseguir un resultado erróneo.

La mecánica de la memoria

La memoria se organiza en base al conocimiento. Todo lo que recordamos está directamente conectado con algo que conocemos, e indirectamente con otras muchas cosas. El conocimiento de nuestro número de teléfono está conectado al conocimiento de los teléfonos, de cómo se usan y de para qué sirven. El conocimiento del hecho de que Helsinki es la capital de Finlandia está conectado a lo que sabemos de las capitales y de Finlandia. Cómo recordamos cualquier cosa depende del grado de conexión que esa cosa tenga con las demás cosas que conocemos.

Eso es por lo que el aprendizaje a través de la memorización es a la vez difícil e ineficaz. Es mucho más fácil recordar cosas que nos resultan significativas que aquellas que no lo son. A una persona que comprende los números primos (divisibles por sí mismos y por uno) le resulta mucho más fácil recordar las series 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19 que a otra que no los comprende. A una persona que comprende muy bien las matemáticas le resulta fácil recordar otras cosas sobre matemáticas; y a una persona que se siente confusa con las matemáticas le resulta imposible recordar cualquier cosa de las matemáticas.

No solamente es más fácil memorizar hechos matemáticos si tienen sentido, sino que también es fácil exteriorizarlos. El que algo tenga sentido determina la rapidez con la que memorizamos y la rapidez con la que lo expresamos. En cuestiones muy relacionadas con aspectos importantes de nuestra vida, tanto el aprendizaje como la memorización tienen lugar sin ningún esfuerzo consciente.

¿Dónde debería terminar la memorización?

¿Cuánto deberíamos memorizar? No existe límite alguno para la capacidad de la memoria, pero el aprendizaje lleva tiempo y la memorización puede resultar difícil e inútil si hemos almacenado grandes cantidades de conocimiento que no tienen sentido alguno para nosotros. Probablemente existe un límite de cuántos pormenores matemáticos tenemos que recordar – pero ese límite difiere según cada individuo.

Un conjunto mínimo de memoria matemática debería incluir los "*hechos*" numéricos relacionados con la suma y la multiplicación hasta diez, además de los procedimientos elementales para los cálculos simples. ¿Qué decir sobre el ejemplo de 14 x 14? Muchas personas recuerdan hechos sobre números superiores a diez, no solamente para sumar y restar, sino para otros muchos fines matemáticos, simplemente como resultado del interés y la experiencia. Pero normalmente no es necesario o no es posible especificar cuáles deberían ser esos componentes adicionales de la memoria.

Las personas que multiplican números entre 10 y 20, especialmente si dichos cálculos son importantes e interesantes en su contexto diario, recordarán muchas multiplicaciones de varios dígitos, incluyendo 14 x 14, con la misma facilidad que recuerdan su fecha de nacimiento o su número de

75.- Por ejemplo, DEHAENE (1997, p. 148) teléfono. Las personas cuyo trabajo o afición tienen que ver con los números y sus relaciones pueden recordar cantidades enormes de ellos. Una historia que se suele contar al respecto[75] es la de Ramanujan, matemático indio autodidacta (reconocido como genio) en su lecho de muerte a la edad de 32 años. Un visitante había comentado que el número de licencia del taxi en el que había venido, 1729, era "*poco interesante*". Por el contrario, dijo Ramanujan, 1729 era el número más pequeño que se podía construir en dos formas sumando dos números elevados al cubo – 13 + 123 y 103 + 93. Ramanujan estaba tan familiarizado con los números como lo están los ornitólogos con los pájaros.

La cuestión no es el tamaño de la memoria o "*lo buena*" que es. Lo que determina, relativamente hablando, lo bien que funciona nuestra memoria en circunstancias particulares depende de la experiencia, el interés, la comprensión y la confianza que aportamos a lo que estamos haciendo.

La capacidad para memorizar cosas matemáticas difiere según la facilidad que uno tenga para desenvolverse en el mundo de las matemáticas, pero los esfuerzos por memorizar pueden resultar totalmente improductivos cuando comprendemos poco lo que estamos haciendo. Esa es una de las razones por las que las matemáticas se pueden convertir en algo frustrante y opaco, no importa lo motivados que estemos. Si nos esforzamos por memorizar algo que no entendemos, si estamos en la parte equivocada del muro de cristal, tendremos enormes dificultades para recordarlo. Pero no tendremos dificultad alguna para recordar nuestro fracaso y frustración – la condición subyacente de cualquier fobia.

CALCULAR

Si no encontramos en nuestra memoria lo que queremos saber, tendremos que solucionarlo o consultarlo. El cálculo, o la búsqueda de la solución, es el método tradicional, convencional y educativamente aprobado de solucionar los problemas matemáticos, incluso cuando estos problemas – sobretodo cuando son cotidianos – se pueden solucionar con más rapidez y fiabilidad usando artefactos electrónicos.

Las calculadoras se han considerado frecuentemente un engaño en los contextos educativos (casi tan malas como preguntarle a otro "*la respuesta*"). se suele pensar que los estudiantes sufrirán un considerable retraso si no solucionan los problemas por sí mismos, incluso cuando se trata de cuestiones considerablemente complejas y abstractas. "*Hazlo tu mismo*" se considera más admirable y beneficioso que alguien o algo lo haga por ti.

Pero el tema no está tan claro como parece. Hacer las cosas por uno mismo puede resultar de utilidad – pero solamente si ello va acompañado de cierto interés, comprensión y éxito. Es posible que los artefactos electrónicos tengan desventajas, pero solamente cuando se carece del interés y la comprensión. Antes de aventurarnos a considerar las ventajas y desventajas de solucionarlo uno mismo o con las calculadoras, deberíamos observar ambas cosas de forma separada. En aras de la brevedad, me referiré a "*calculadoras*" en general cuando me quiera referir a "*calculadoras y otros dispositivos electrónicos*" u "*ordenadores y calculadoras*".

El método "práctico"

¿Cuáles son las ventajas del "*hazlo tu mismo*", bien sea con libretas escolares y problemas escritos, bien sea con cálculos de dimensiones en el trabajo, o cantidades de ingredientes, o con extractos de cuentas o facturas de compra?

Siempre se ha creído que hacer algo por uno mismo, con o sin la ayuda de otras personas, puede dar como resultado el aprendizaje del procedimiento matemático empleado y las relaciones matemáticas implicadas. Puede que sea cierto – siempre que el estudiante comprenda lo que está ocurriendo y no se distraiga con cálculos complicados. Pero lo que puede ser cierto en el caso de actividades "*prácticas*" puede que no sea igual en el caso del uso de calculadoras. Las calculadoras no tienen porqué ocupar el puesto del pensamiento; normalmente es necesario comprender lo que se está haciendo para teclear los números y los procedimientos adecuados.

Se supone que una segunda ventaja del cálculo práctico es el reconocimiento de errores. Es más probable que nos demos cuenta de que hemos cometido un error o de que hemos obtenido un resultado impreciso cuando ello sea parte de algo que estamos tratando de solucionar por nosotros mismos, que cuando despreocupadamente lo leamos en la pantalla de un ordenador. Pero si sabemos lo que estamos haciendo, el resultado que vemos en la calculadora nos puede parecer tan obviamente irreal como ocurriría si lo obtuviéramos en el papel. Si hemos calculado que necesitamos 50 litros de gasolina para recorrer unos cientos de kilómetros con el coche familiar, igualmente reconoceremos si hemos cometido un error cuando el resultado lo veamos en la ventana del ordenador o en una hoja de papel.

Una tercera hipotética ventaja, que no se suele relacionar con las matemáticas, es la satisfacción. Pasar media hora tratando de solucionar algo puede resultar mucho más interesante que pasar el mismo tiempo colocando números ordenadamente en un dispositivo mecánico y leyendo después resultados sin sentido. Pero una vez más, se pueden presentar argumentos contrarios, es decir, que las calculadoras pueden reducir el tedio del trabajo computacional.

No existe evidencia de que recordemos más cosas cuando las solucionamos por nosotros mismos que cuando las consultamos. Incluso los "*hechos matemáticos*" se pueden aprender de forma accidental, durante cualquier tipo de cálculo. Si nos parece importante averiguar que 14 x 14 = 196 y calculamos o consultamos el resultado un par de veces en circunstancias en las que no estamos confusos, entonces es probable que lo memoricemos sin esfuerzo alguno.

Cualquier cosa a la que nos enfrentemos durante el cálculo (siempre y cuando comprendamos y pensemos en lo que estamos haciendo) se almacena con más facilidad en nuestra memoria y se recuerda cuando vuelva a ser necesario, que cuando las metemos a la fuerza con ejercicios y memorización.

Por desgracia, a los niños se les enseña cálculo memorizando, sin apenas comprensión y puede parecer que hacen grandes progresos en las matemáticas mientras están aprendiendo así. También muchos adultos pueden hacer lo mismo, con la simple suma y resta e incluso con la multiplicación y la división. Entonces chocan con el muro de cristal.

CONSULTAR

Durante siglos, la única alternativa para realizar cálculos complejos por uno mismo consistía en consultar lo que se estaba haciendo en tablas – tablas impresas en este caso. La impresión de tablas fue uno de los primeros y más extendidos usos de la impresión, desde datos matemáticos de todo tipo (cuadrados, raíces, logaritmos, ratios trigonométricas e interés compuesto) hasta el estado diario de las mareas, las estrellas y los planetas.

Todavía se enseña la consulta de tablas matemáticas impresas, o al menos los estudiantes las conocen, pero al igual que el uso de la regla de cálculo, probablemente sea un uso casi extinguido. Es igual de probable que en la actualidad las tablas aparezcan en los ordenadores como en papel.

Curiosamente, las tablas que se supone que están "*construidas*" (o "*programadas*") en las calculadoras y en los ordenadores en realidad no están ahí. Por el contrario, la calculadora averigua valores específicos cuando se requiere. Los diseñadores de los dispositivos electrónicos tienen que hacer esencialmente las mismas elecciones que hacemos todos en cuestiones matemáticas – si es más económico almacenar hechos (con la carga en "*memoria*") o hallar lo que se requiera y cuando se requiera (a costa de la rapidez). Por ejemplo, las tablas electrónicas de las mareas y las tablas de las raíces cuadradas son elaboradas a partir de recetas, cocinadas mientras esperamos.

El método del "tecleo"

Anteriormente señalé que los estudiantes pueden aprender cuando tratan de solucionar los problemas por sí mismos, siempre y cuando no se distraigan con cálculos complicados. Una ventaja de las calculadoras es que pueden realizar complicadas operaciones con rapidez – que normalmente se acercan más a la vida real. Los libros de texto suelen emplear números "*fáciles*" pero poco realistas ("*un conductor recorre 5 Km. a una velocidad media de 70 Km. por hora*" cuando lo más realista sería decir "*un conductor recorre 3,5 Km. a una velocidad media de 58,7 Km. por hora*"). Apenas hace falta un pequeño esfuerzo más en teclear unos dígitos extra en el teclado, sin embargo el resultado puede parecer auténtico y así atraer al estudiante y prepararlo para las situaciones de la vida real. El hecho de que en los libros de texto siempre aparezcan números fáciles puede además propiciar que los alumnos se aventuren a realizar suposiciones aleatorias o inapropiadas sobre cuáles deberían de ser los resultados correctos.

La consulta requiere una comprensión matemática tan prioritaria como si se estuviera resolviendo el problema en el papel, además del conocimiento del dispositivo electrónico que se tenga que usar. Incluso para saber cuánto es 14 x 14, es necesario saber cómo seleccionar en la calculadora el modo de cálculo adecuado, conocer el orden en el que presionar las teclas correctas y saber cómo pedir y leer el resultado que necesitamos. Algunas calculadoras científicas son especialmente difíciles de usar. En ocasiones se pueden obtener los resultados que se buscan, correctamente, sin comprender las matemáticas relacionadas con ellos o las implicaciones matemáticas de los resultados obtenidos. Pero igualmente uno se puede encontrar en la misma situación calculando con lápiz y papel.

Existe un riesgo obvio con el uso de calculadoras y son los errores que pueden ocurrir cuando la persona que está introduciendo los datos no puede monitorizar el cálculo que se está realizando. Por ejemplo, en la caja de un supermercado, la cajera puede estar introduciendo códigos con el lector electrónico a la vez que pesa productos, los mete en bolsas y charla con los clientes, mientras que el ordenador va registrando automáticamente los artículos comprados, subtotales, totales, impuestos y los imprime en un ticket detallado.

Tanto la cajera como el cliente pueden estar ajenos a los potenciales fallos que pueden ocurrir cuando se emplean calculadoras en un supermercado. Aún así, los dispositivos electrónicos se usan en todo tipo de contextos: médicos, judiciales, financieros, educativos y otros tantos contextos burocráticos para almacenar, procesar y actuar sobre datos que en ningún momento habrán pasado ante los ojos de ningún ser humano.

Apenas se enseñan ya en las escuelas cálculos complejos como divisiones largas o la obtención de raíces cuadradas, porque resulta mucho más fácil y preciso realizarlas con calculadoras. No está claro qué tipo de pérdida debe suponer para los estudiantes. Muchos estudiantes en el pasado se dieron de bruces con el muro de cristal cuando se enfrentaron a las divisiones largas y muchos otros aprendieron a realizar cálculos sin entender qué estaban haciendo. Los ordenadores y las calculadoras solucionan problemas de forma rutinaria sobre interés compuesto que muy pocas personas podrían haber averiguado en el pasado, y que entendían igual de poco entonces cuando consultaban las tablas impresas como ahora cuando comprueban el resultado en el monitor.

Por ello, ¿es buena idea usar calculadoras y otros dispositivos electrónicos en clase? No trato de defender el hecho de que las calculadoras sean siempre mejores o más necesarias. Pero un rechazo puritano de su uso porque hacen la vida más fácil a los estudiantes no es una postura realista a partir de la que evaluar el papel de los dispositivos electrónicos en el aula o el papel de las aulas en un mundo informatizado.

CAPÍTULO 13

Traspasar el muro de cristal

Aterrizar con un hidroavión es una empresa complicada. El avión necesita dos buenos flotadores que lo mantengan estable en la superficie del agua, pero resultan un estorbo cuando el piloto debe de despegar. Los flotadores crearían tal resistencia cuando el avión intentase despegar que no sería posible que se elevara, no importando la potencia a la que funcionaran los motores. La solución es que se construya un "*escalón*" en la parte inferior de los flotadores de forma que cuando el avión acelere en la superficie, los flotadores asciendan hasta que estén fuera del agua y el lastre quede sustancialmente reducido. Una vez que el avión "*suba ese escalón*", como diría el piloto, quedará libre de agua y podrá ascender.

Los estudiantes tienen un problema similar cuando tratan de volar por las matemáticas. Antes de despegar, flotan con seguridad en la superficie del lenguaje cotidiano y de los conceptos conocidos. Pero para entrar en el mundo de las matemáticas deben liberarse del lastre del mundo físico, "*deben subir ese escalón*" y entrar libres en un entorno totalmente distinto.

Por desgracia, con frecuencia ocurre que los estudiantes están dispuestos a iniciar el vuelo - sus motores rugen mientras se desplazan por la superficie – pero nunca logran despegar al espacio matemático. Los estudiantes, y sus profesores, pueden pensar que el problema reside en el progreso dentro del agua, pero el obstáculo real puede ser la incapacidad de abandonarla.

Ser práctico en las matemáticas

Nunca me ha parecido bien decir a los profesores lo que deberían de hacer (aunque no escasean los individuos deseosos de hacerlo). La razón práctica de mi negativa a recomendar determinadas actividades, procedimientos, métodos y materiales es la conclusión a la que he llegado de que las matemáticas no deberían enseñarse como una secuencia de explicaciones, ejercicios y exámenes preempaquetados. No existen las panaceas ni las recetas milagrosas.

Muchos profesores tienen poca libertad a la hora de elegir los materiales que usar y el curriculum que seguir. Aún así, su mayor preocupación debería ser siempre comprender la situación matemática en la que se encuentra el alumno. La cuestión no es tanto lo que el profesor (o el libro de texto) está tratando de enseñar como lo que el estudiante está aprendiendo. Si el estudiante está aprendiendo erróneamente que las matemáticas son confusas o una amenaza, o que siempre estarán más allá de sus posibilidades, obviamente este no es el tipo de aprendizaje deseado. Tampoco es deseable que se aprendan las matemáticas como un conjunto de procedimientos rituales y hechos inconexos. El propósito del aprendizaje debe ser que el estudiante pueda pensar como un matemático y que demande oportunidades de explorar y evolucionar desde un punto de vista matemático.

Comprender las matemáticas

Cuando uso la frase "*comprender las matemáticas*", no me refiero a relacionar el conocimiento y los procedimientos matemáticos con el "mundo real". Se pueden realizar muchos cálculos prácticos sin comprender las matemáticas implícitas en ellos, al igual que se puede conducir un coche sin saber de mecánica. El estudiante puede realizar algunos movimientos matemáticos, incluso puede producir "*respuestas correctas*", sobre todo después de haber realizado multitud de ejercicios, sin ser capaz de generalizar o de comprender por qué se cometen fallos.

La alternativa, "*comprender las matemáticas*", significa una apreciación de la importante red de relaciones matemáticas, los modelos numéricos que determinan y justifican las aplicaciones. Comparado con un niño que puede producir el "*hecho matemático*" relevante de que $7 + 6 = 13$, otro niño que comprenda que $7 + 6$ es la misma relación matemática que $10 + 3$, ha aprendido a pensar matemáticamente.

Se piensa que los estudiantes que sean capaces de realizar simples actividades de recuento y computación están demostrando inventiva, creatividad, exploración y descubrimientos matemáticos. Por desgracia, esto puede suponer una desilusión tanto para ellos como para los profesores. Tener éxito en los ejercicios de contar y sumar (deslizándose por la superficie del lenguaje y de los conceptos conocidos) no significa que hayan aprendido nada matemático (no han despegado). Que tengan éxito en los ejercicios no significa que los niños hayan aprendido lo que los profesores suponen – es posible que estén haciendo algo totalmente distinto. Y finalmente, que tengan éxito con estos ejercicios iniciales no quiere decir que estén desarrollando una base útil para un posterior progreso en matemáticas. Todo lo contrario; veremos que lo que los niños han aprendido involuntariamente puede haberse inculcado tan profundamente que estarán fatalmente incapacitados para dar sentido a posteriores relaciones con números.

Aprender matemáticas

Cualquiera puede aprender a entender y disfrutar de las matemáticas – siempre que sean capaces de traspasar el muro de cristal y de que nada vaya mal. Esta es mi premisa. Pero primero debería aclarar qué quiero decir con "aprender matemáticas".

En primer lugar, no quiero decir aprender todo sobre las matemáticas. Nadie sabe todo de las matemáticas, y son muy pocos los que necesitan saber lo que saben los matemáticos, al menos no con la misma profundidad.

Y aprender matemáticas no puede significar aprender todo lo incluido en un curriculum en particular, concebido casi con seguridad como un compromiso ilusorio a cargo de un grupo de personas alejadas de los profesores y de los alumnos que son los directamente afectados. Especificar algo en un curriculum no significa que se pueda enseñar, aprender o comprender con facilidad. Y cumplir con los objetivos de un curriculum no es garantía de que nazca un futuro matemático. Un curriculum es un proyecto de aprendizaje, no el mapa que señala la mejor ruta para llegar a las matemáticas. Los objetivos, o los estándares, curriculares pueden ser distracciones más que acontecimientos importantes.

El énfasis en el uso de la comprensión es explícito en el curriculum "*práctico*" que se supone que refleja las "*necesidades*" de la mayoría de los estudiantes en su vida diaria más que en un curriculum que sirve a una "*minoría diminuta*" que desearía obtener mejores notas.[76] La condescendiente

76.- El ejemplo lo he tomado del Curriculum nacional británico, discutido por GREER y MULHERN (1989).

dicotomía entre una masa esencialmente no matemática y una pequeña pero elitista minoría es falsa y peligrosa. La idea de que la mayoría quedaría servida con un lote de destrezas más que con una profunda comprensión matemática sería el último efecto del cierre del mundo matemático a la mayoría de las personas, incluso a aquellos que desearían elegir alguna de las profesiones que emplean procedimientos tecnológicos o estadísticos.

Ser matemático es un estado mental más que un repertorio de destrezas y de conocimiento. Convertirse en matemático sería una iniciación, una afirmación, una entrada a un club[77] que está abierto a todos los estudiantes, no importa lo limitado de su experiencia. A los matemáticos se les distingue por su constante disponibilidad para aprender más sobre las matemáticas; están abiertos a las experiencias matemáticas, no tienen miedo al entorno matemático y demuestran una continua fascinación por la relación entre los números.

La esencia del aprendizaje de las matemáticas tiene que ser la continuidad, cerrar más que abrir. El aprendizaje en sí es continuo; tiene lugar a lo largo del tiempo. La falta de tiempo interfiere en el aprendizaje de las cosas que de otro modo se aprenderían con facilidad si hubiera menos prisas.[78] Es mucho mejor para el estudiante acomodarse en una cabeza de puente segura que esperar a conseguir objetivos arbitrarios de acuerdo con plazos arbitrarios.

¿Cuántas matemáticas se suponen que deben aprender las personas? Unos pocos se convertirán en virtuosos con relativa rapidez. Otros pocos lucharán por conseguir pequeños logros. Muchos estarán entre ambos extremos. Lo importante no es cuántas matemáticas se pueden aprender en una determinada cantidad de tiempo, sino la disponibilidad y las oportunidades que el estudiante tenga para explorar las matemáticas de una forma interesante y libre de estrés.[79]

¿Por qué todo el mundo puede aprender matemáticas?

El aprendizaje es una actividad natural e irrefrenable del cerebro humano y todos tenemos el mismo tipo de cerebro. No todos alcanzaremos el mismo nivel de pericia – diferimos en las capacidades generales, la energía, la determinación, los intereses y la experiencia – ni tampoco aprenderemos al mismo ritmo. Pero cualquier cosa que una persona pueda aprender lo pueden aprender las demás, al menos hasta cierto punto.

Las matemáticas no vienen en los genes, ni están engarzadas en las células del cerebro; no han existido el suficiente tiempo en la historia del ser humano. No podemos conseguir matemáticas de otro ser humano a través de una transfusión. Las matemáticas son una combinación del descubrimiento y la invención humanos. Si podemos aprender cualquier cosa, podemos aprender matemáticas. Si queremos aprender, o pensamos que podemos aprender, es otro asunto. Todo el mundo puede aprender aptitudes negativas. Todo el mundo puede aprender fobias.

En realidad, no podemos evitar aprender. El problema con la enseñanza formal no es que los estudiantes aprendan o no, es lo que aprenden. Está en la naturaleza del cerebro humano buscar las tres C – consistencia, coherencia y consenso – en todas las situaciones. Si los estudiantes se enfrentan a las matemáticas en circunstancias que les resultan inconsistentes, incoherentes y polémicas, eso es lo que aprenderán de las matemáticas.

Que los estudiantes están aprendiendo, a veces de lo más irresolutamente, es evidente en la inventiva que muestran, incluso cuando todo les sale mal. Como demostraré brevemente, los niños que se enfrentan a las mayores dificultades son los que inventan las estrategias más ingeniosas.

La inventiva puede ser el "*escalón*" que suben los estudiantes por encima de las limitaciones del mundo físico y del lenguaje natural para entrar en el cielo abierto de las matemáticas. Los estu-

77.- El argumento se desarrolla en Joining the Literacy Club (SMITH, 1988) y The book of Learning and Forgetting (SMITH, 1998)

78.- Ver "*Just a Matter of Time*" (SMITH, 2001).

79.- Podría proponer argumentos similares para el aprendizaje de la música, la navegación, un idioma o la astronomía. Lo que importa no es la cantidad de superficie cubierta sino los caminos que se abren.

diantes deben colocar en primer lugar su imaginación, y desde luego que luchan por hacerlo. Los niños a veces dan respuestas correctas por razones equivocadas y cuando dan respuestas incorrectas, sus errores son sistemáticos. Más adelante ofreceremos ejemplos de la inventiva del estudiante, tanto "*correcta*" como "*incorrecta*".

Como ya he dicho, cualquiera puede aprender a comprender y a disfrutar de las matemáticas siempre y cuando nada vaya mal. Y nada irá mal siempre que se cumplan cuatro condiciones esenciales. Estas condiciones se pueden expresar de una manera tan sucinta que las voy a ofrecer en una breve lista:

Cuatro condiciones esenciales para aprender matemáticas

1. las matemáticas deben ser interesantes y comprensibles
2. no existirá el miedo a las matemáticas
3. no se aprenderán las cosas que no sean apropiadas
4. habrá tiempo suficiente

1. Interés y comprensión. La primera condición esencial para aprender es fácil de expresar pero no siempre fácil de conseguir en el aula, ni incluso a través del estudio individual. La situación en la que debe tener lugar el aprendizaje debe ser interesante y comprensible.

No quiere decir que el material aburrido e incomprensible sea más difícil de aprender. Lo que se aprende es que el material es aburrido e incomprensible, no importa lo fascinante o claro que otros te digan que es, o lo útil que será que se aprenda.

El interés nos acerca a una situación; llama nuestra atención y centra la imaginación. La comprensión proporciona los nexos que nos permiten acercar lo nuevo a lo que ya conocemos. Con el aburrimiento no existe interés, y ante la incomprensión existe aversión. Algunos profesores y diseñadores curriculares parecen pensar que el aburrimiento y la confusión son problema del alumno, como si el aprendizaje pudiera tener lugar si el alumno lo intentara con más fuerza. Y ciertamente, el aburrimiento y la falta de comprensión son enormes problemas ante los que se enfrenta el profesor al enseñar una asignatura, no importa lo que los alumnos piensen de ella.[80]

Pero por desgracia, hacer que el material sea interesante y comprensible es el papel del profesor. Los estudiantes aprenden lo que experimentan. Y eso comienza con la lección más importante de todas, el aprendizaje del miedo.

2. Aprender a temer. El miedo es la primera de las cosas inadecuadas que no debe aprenderse si queremos traspasar el muro de cristal. Nadie ha nacido temiendo a las matemáticas – o considerándolas aburridas, incomprensibles o difíciles. La experiencia nos enseña a qué deberíamos de temer, al igual que nos enseña lo que no podemos hacer.

A veces obtenemos esa experiencia negativa de primera mano. Nos encontramos en situaciones en las que tenemos miedo – tal vez, por ejemplo, porque creemos que ante los resultados de un examen nos sentiremos incompetentes e incluso humillados. No es difícil hacer que una persona se sienta incómoda e inepta, especialmente a un niño que no tiene control sobre las situaciones que le superan. Una de las formas más fáciles y comunes de crear ansiedad es el uso frecuente de exámenes, diseñados especialmente para descubrir donde están "*fallando*" los alumnos, de forma que puedan "*ser conscientes*" de su falta de comprensión.

Pero es igualmente fácil y bastante más común que las personas, especialmente los niños, tengan miedo del modo en que ellos ven que los demás se comportan. Los profesores y los padres que

80.- Por supuesto, muchos niños y jóvenes declaran que una situación es aburrida como forma de expresar su falta de deseo por seguir el plan establecido. Por desgracia, lo que pervive es que enseñar algo que parece aburrido, incluso sin malicia alguna, demuestra solamente que la asignatura es aburrida (y que la malicia surte efecto). El problema no es que los estudiantes se nieguen a demostrar interés solamente porque queremos que lo demuestren, pero el sistema educativo con frecuencia exige (o al menos espera) que los profesores enseñen y los alumnos aprendan en situaciones que son para ambos aburridos y frustrantes.

piensan que las matemáticas son aburridas o incomprensibles trasladan esas sensaciones al niño. Los profesores y los padres que temen exponerse a las matemáticas fácilmente trasladan ese miedo. Los niños no aprenden necesariamente lo que nosotros pensamos que les estamos enseñando, sino que son más proclives a aprender lo que inconscientemente demostramos.[81]

3. Aprender cosas inapropiadas. Uno puede aprender cosas inapropiadas sobre uno mismo – o sobre las matemáticas. Lo más inapropiado que se puede aprender sobre uno mismo es que uno no puede hacer matemáticas. Lo más inapropiado que se puede aprender sobre las matemáticas es que son aburridas, extrañas, desconcertantes y causantes de ansiedad – se ha ido más allá del territorio familiar del lenguaje, pero todavía no se siente a gusto en el mundo de las matemáticas. Se está empujando al muro de cristal.

Todavía se pueden aprender otras muchas cosas inapropiadas sobre las matemáticas, comenzando por la extendida convicción de que las matemáticas se centran en el recuento, y se extienden a malentendidos como la creencia de que la suma y la multiplicación siempre tienen como resultado números mayores, o que las fracciones deben tratarse de forma diferente a los números enteros. Proporcionaré más datos a continuación.

Dichos malentendidos pueden resultar peligrosos cuando la enseñanza une las matemáticas con operaciones que se realizan con "*objetos familiares*" en "*situaciones auténticas*", usando el lenguaje cotidiano. Enseñar de esta manera puede permitir que los alumnos realicen aparentes progresos en la superficie, pero nunca les permitirá subir el escalón para despegar hacia el reino de las matemáticas.[82]

4. Tiempo. El aprendizaje no puede forzarse. Las matemáticas no son algo que se puedan aprender deprisa, sobretodo si el estudiante las encuentra confusas y difíciles. Es absurdo esperar que todo el mundo aprenda al mismo ritmo, aunque las limitaciones de los acercamientos educativos actuales ponen en una tesitura temporal a los profesores y a los alumnos. Los estudiantes que se quedan "*rezagados*" a duras penas pueden ponerse al día, y la tarea resulta mucho más ardua en estos casos. Los alumnos más débiles son los que más deberes tienen. Tienen más que aprender, menos tiempo, menos éxito, y menos incentivos que los estudiantes que pueden avanzar más rápidamente. La distancia entre estudiantes que son buenos en matemáticas y aquellos que no lo son es cada vez mayor conforme se va avanzando en el sistema educativo.

Y en el momento de hacer un examen, los estudiantes que piensan que no tienen tiempo suficiente son los que tienen mayor probabilidad de dejarse llevar por el pánico y no poder pensar constructivamente.

EXTRAER DE LA MENTE MATEMÁTICA

El constructivismo como teoría psicológica afirma que el conocimiento – y por lo tanto, la comprensión – no es una propiedad del mundo físico, sino algo que debe construir cada individuo. Las explicaciones no crean conocimiento ni comprensión. Todo lo que sabemos y pensamos debe cons-

81.- No es sorprendente que los estudiantes con "*ansiedad ante las matemáticas*" sienten tensión, pánico e inminente crisis cuando entren a una clase de matemáticas, minando así su interés y sus resultados. KARAN SMITH (2000) resume las últimas investigaciones en un informe sobre un curso de inicio de álgebra que combinaba la enseñanza tradicional con una ayuda "*no tradicional*" para estudiantes con actitudes negativas ante las matemáticas y antes sí mismos. Cuando se tuvieron en cuenta los situaciones inestables, muchos de los estudiantes contaron que se sentían menos ansiosos con respecto a sus capacidades para enfrentarse a las matemáticas y más confiados con el aprendizaje.

82.- ¿Por qué algunos niños que son inteligentes muestran escasos resultados en las matemáticas escolares? GINSBURG Y ALLARDICE (184) demostraron que la principal causa era la falta de comprensión de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas. Los niños habían adoptado o aprendido procedimientos o principios incorrectos – lo que los autores llamaron "*lagunas, aptitudes y fallos informales*" (p.209). La investigación mostró que esos niños pensaban que las matemáticas eran arbitrarias y hacían elecciones al azar debido al pánico o la ansiedad. Tenían problemas con la enseñanza y los exámenes rigurosos, los textos confusos y sufrían desánimo ante el pensamiento independiente y los estilos idiosincrásicos. Los autores concluyeron "*estos niños no tienen problemas cognitivos, la educación que han recibido es pobre*".

truirse y evaluarse en nuestra mente. Esto no significa que podamos crear cualquier tipo de conocimiento que queramos – normalmente (aunque no siempre) evaluamos nuestras teorías con respecto a nuestra experiencia y a las teorías de los demás. Buscamos la coherencia, la consistencia y el consenso. Pero el conocimiento no se puede colocar en la mente de nadie. Debe provenir de la visión y la reflexión, incluso cuando estamos pensando en algo que nos han dicho.[83]

La postura constructivista dice que la comprensión matemática no es algo que se pueda explicar a los niños, ni es una propiedad de los objetos o de otros aspectos del mundo físico. Por el contrario, los niños deben "*reinventar*" las matemáticas, en situaciones análogas a aquellas en las que se inventaron o descubrieron por primera vez los aspectos relevantes de las matemáticas. Deben construir las matemáticas por sí mismos, usando las mismas herramientas y actitudes mentales que emplean para construir la comprensión del lenguaje que escuchan a su alrededor.

Por ejemplo, Constance Kamii, líder en la enseñanza constructivista de las matemáticas, defiende que la suma no tiene porqué enseñarse. Los niños de los primeros cursos de primaria pueden construir el conocimiento matemático lógico relevante por sí mismos cuando están implicados en actividades tales como igualar pequeños grupos de cuantificadores. Kamii quiere que los niños aprendan a través de su propio pensamiento, no a partir de "*hechos*", cuando están implicados en situaciones de la vida diaria, en votar y en juegos de mesa y de dados, así como en discusiones sobre problemas computacionales.

Kamii es autora de tres libros titulados Young Children Reinvent Arithmetic (o Young Children continue to Reinvent Arithmetic)[84]. Antigua alumna y colega de Jean Piaget, demuestra cómo el dominio de los números y las operaciones numéricas pueden desarrollarse espontáneamente con la progresión del "*pensamiento científico*" de los niños. Y el pensamiento lógico y científico – argumenta – surge de la abstracción reflexiva de sus propias acciones. Kamii recomienda que los niños debieran de ser autónomos en su aprendizaje, deberíamos estimularlos para que piensen; además ella insiste en la importancia de la interacción social. Es posible que sean necesarias las ideas conflictivas, al igual que las respuestas incorrectas si se desea que se obtengan niveles altos de comprensión. Se muestra muy crítica con los "*trucos*" y los "*algoritmos*" que se enseñan sin preocuparse por su comprensión, como decir a los niños que calculen una media añadiendo en primer lugar los números relevantes o que multipliquen 80 x 8 multiplicando primero 8 x 8 y después añadiéndole un cero, cuando ni siquiera le encuentran sentido a los pasos iniciales.[85]

Ello no significa que los niños deban de abandonarse a su libre albedrío para que recapitulen 5000 años de historia matemática, incluyendo todos los movimientos en falso y los pasadizos ciegos. Pero sí se afirma que los niños pueden y deben inventar las matemáticas por sí mismos si se les dan las oportunidades para experimentar y reflexionar de forma relevante.

HACER LAS MATEMÁTICAS DIFÍCILES

Aprender algo que tenga sentido no es difícil. La lucha por aprender es siempre una lucha por encontrar sentido y cuando aprendemos algo, lo aprendemos de forma que signifique algo para nosotros (no importa cómo le pueda parecer a los demás). Lo que aprendemos – y el aprendizaje no se puede evitar – son las formas particulares de resolver o evitar un problema. Si encontramos una estrategia que nos sirva, eso es lo que aprendemos. Y lo que aprendemos no se puede borrar. Los malos hábitos son tan persistentes como los buenos.

La inventiva de los niños no conduce necesariamente a conclusiones productivas. Los niños

83.- Una introducción accesible al constructivismo desde el punto de vista educativo se encuentra en Fosnot (1995). Ver además Saxe (1991).

84.- Kamii (1985, 1989, 1994, 2000). Los ejemplos y afirmaciones de esta sección han sido extraídos del trabajo de Constance Kamii.

85.- Kamii se refiere a las reglas convencionales para los procedimientos matemáticos, como "*llevar*" o "*tomar prestado*", como algoritmos. Su investigación que muestra los efectos perniciosos de enseñar algoritmos en los cuatro primeros cursos de primaria, así como otros hallazgos similares en otras partes del mundo, aparecen en Kamii y Dominick (1998). En relación con las formas en que los profesores intentan generar pensamiento matemático a través de problemas y discusiones, ver Cobb y Bauersfeld (1995) y Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999).

pueden aprender las cosas equivocadas. Veamos algunos ejemplos.

Contar con el contar

La afirmación que subyace a muchos métodos de enseñanza "*prácticos*" es que contar es el alma de las matemáticas. Los niños tienen que aprender en primer lugar a contar (adquirir un "*sentido numérico*"), a continuación adquirir un conocimiento del sistema de base y del sistema de colocación, dominar operaciones "*simples*" (suma, resta, multiplicación y división simple), y memorizar un número de "*hechos matemáticos*" (tablas de sumar y multiplicar) y alguna geometría elemental. Entonces estarán en posición de aplicar las matemáticas en situaciones prácticas y de profundizar en aspectos de las matemáticas, como fracciones y decimales, álgebra, geometría superior, exponentes y logaritmos. Por desgracia, contar es lo único que muchos de los estudiantes consiguen aprender, y su confianza en el recuento no les deja avanzar.

La idea de contar resulta fácil a los niños debido a que las ideas implícitas (uno, más, todos) están arraigadas en el lenguaje y en la experiencia diarias. Los problemas simples de sumas, y a su debido tiempo de multiplicación y resta, se solucionan normalmente con variantes espontáneas del recuento.

La suma comienza normalmente con una simple continuación del recuento – el proceso conocido como contar hacia adelante. Si se les pide que sumen 3 y 2, los niños comienzan en el 3 y usan los dedos para "*contar hacia adelante*" dos números más: "*cuatro, cinco*".

Muy pronto los niños son capaces de distribuir con el uso de los dedos, pero contando mentalmente – "cuatro más tres son cinco-seis-siete"[86]. Con el "*contar hacia adelante*", los estudiantes pueden sumar números de dos dígitos sin tener que preocuparse de llevarse: "*ocho más cuatro son nueve-diez-once-doce*"; "*doce más cuatro son trece-catorce-quince-dieciséis*". En efecto, estos estudiantes no tienen noción de que los números por encima de nueve son diferentes de los números que los preceden – incluso si se deben escribir con dos dígitos. No comprenden el sistema de base.

El problema puede agravarse por el hecho de que los números del diez al veinte no suenan como si fueran diferentes de los números por debajo de diez.

Veintiuno, veintidós, etc., suenan como combinaciones de números más pequeños, como lo hacen dos cientos dos, y doscientos treinta y cuatro. Pero diez, once, doce, trece.... Diecinueve, veinte suenan como todos indivisibles.

El contar hacia adelante es casi universal. Los niños con frecuencia inventan el procedimiento de forma espontánea, o están dispuestos a adoptarlo de otros niños o del profesor. Debido al éxito inmediato que este procedimiento aporta, algunos profesores lo enseñan con la creencia de que ayudará a los niños a progresar en las matemáticas. Esto puede ser cierto, pero solamente por un momento.

Los niños que usan este procedimiento aprenden rápidamente que el modo eficaz de realizar una suma contando es hacerlo partiendo del número mayor. Cuando se les pide que sumen 3 y 9, contarán hacia adelante tres partiendo de nueve en vez de contar nueve partiendo de tres. Una vez más, parece que están adquiriendo maestría, pero en realidad están explotando un atajo inteligente para conseguir respuestas correctas que lo único que les proporcionan son ganancias a corto plazo.

Estos niños tienen además pocos problemas en trasladar el proceso a la resta, ayudándose del "*contar para atrás*": si a nueve le quitas tres son ocho-siete-seis, contando a hurtadillas hacia atrás con los dedos o con la imaginación.

La actitud generada al saber que diez, once y doce son una continuación poco complicada de siete, ocho y nueve puede que no revele las dificultades implícitas hasta que los niños se enfrenten a problemas escritos que tengan números de dos dígitos.

86.- Baroody (1987). Véase además Baroody (1995).

Para entonces, los niños puede que tengan poca idea de lo que supone "*llevarse*" en una suma de dos dígitos o "*prestar*" en una resta de números con dos dígitos.

O bien consideran las columnas como problemas separados de números de un solo dígito o se sienten confusos al no saber qué hacer con un dígito extra:

37 37
+ 18 -18
45 (ó 415) 29 (ó 21, restando los números más pequeños de los mayores)

No han entendido que los dígitos en la posición de las "*decenas*" (como el 3 en 37) no son números a partir de los que se puede contar hacia adelante (o contar hacia atrás), como los dígitos en posición de la unidad; los números en la posición de las decenas son tipos diferentes de números, a pesar de su similitud en apariencia, bien aparezcan verticalmente en "*sumas*" o aparezcan simplemente aislados en números de dos o más dígitos (37 o 200). Esto no es cuestión de convenciones o de procedimientos; es una cuestión de relaciones.[87]

Los esfuerzos por enseñar la base y la colocación independientemente del recuento no tendrán éxito alguno porque los niños carecerán de un marco en el que entender de qué les está hablando el profesor (incluso si aprenden a repetir de memoria lo que el profesor está diciendo). Con su ingenuidad pueden descubrir o aprender formas de proporcionar respuestas correctas sin comprender por qué están haciendo lo que están haciendo.

Este no es un tema trivial. No se resuelve insistiendo en los mecanismos de llevarse y prestar. El problema no radica en lo que los niños no han aprendido (los sistemas de base y de colocación), sino lo que han aprendido ya de forma indeleble: que todos los problemas se pueden resolver contando.

El fracaso en la comprensión de los sistemas de base y de colocación no son más que dos de los múltiples problemas con los que se enfrentarán los niños que aprenden que la suma es contar hacia adelante y la resta contar para atrás.

Cuando "más" debería ser "menos"

La creencia de que la suma significa "*más*" y la resta significa "*menos*" nos conduce al final a tener problemas con los números negativos. La suma de un negativo (4 + -1 = 3) convierte al número positivo en otro más pequeño, y la resta de u negativo (4 - -1 = 5) convierte al número positivo en otro mayor. Esto resulta incomprensible para muchas personas que no han cruzado el muro de cristal para entrar en el mundo de las matemáticas. Pueden memorizar las "*reglas*" lo suficientemente para ser capaces de recitarlas; pueden incluso ser capaces de llevar a cabo procedimientos de vez en cuando; pero nunca podrán entender. ¿Qué se puede hacer? De poco servirán las explicaciones y la memorización será algo inútil. La solución inmediata debe ser posponer la enseñanza, sea lo que sea que exija el curriculum, hasta que el estudiante se sienta cómodo en el mundo de las matemáticas.

Existen problemas similares con la multiplicación cuando se considera una suma repetida, así como la división una resta repetida. La multiplicación por un número menor que 1 da como resultado un número más pequeño (4 x 0,5 = 2); mientras que la división por un número menor que 1 crea un número mayor (4 $\prod$ 0,5 = 8). Esto una vez más puede confundir a los niños (y a algunos adultos también).

La convicción de que la multiplicación da como resultado un número mayor conduce a la con-

87.- El valor del lugar es muy difícil de comprender para los niños de primaria. En realidad, apenas la mitad de los niños que Kamii estudió de 4° curso y solamente un 78 por ciento de los de 8° curso entendieron que el 1 en 16 significa 10 (KAMII, 2000, p.81).

fusión con respecto a muchos problemas del "*mundo-real*", por ejemplo en la conversión de temperaturas y cambio de divisas. Pasar de grados Fahrenheit a grados Celsius implica multiplicar por 5/9 (o lo que es lo mismo, por 0,6), algo que muchos ajenos a las matemáticas se muestran reacios a hacer. Muchas personas no tienen problema alguno en multiplicar el precio de un objeto en dólares americanos por (digamos) 1,5 para obtener el equivalente en moneda canadiense, pero ponen obstáculos a multiplicar un dólar canadiense por 0,67 para saber a cuánto equivale en dólares americanos. Creen que 0,67 y cualquier otro número menor que 1 implica división.

Muchos niños se niegan a dividir un número menor por uno mayor, por lo que ponen en marcha la típica estrategia de multiplicar si el segundo número es mayor que 1 y dividir si es menor que 1. No tienen problema alguno en calcular el coste de 3,5 litros de zumo a 1,25 euros el litro, una simple multiplicación, pero no saben como reaccionar ante el problema de 3, 5 litros a 0,75 euros el litro – quieren dividir.

Todos estos problemas surgen porque los niños están convencidos de que la suma y la multiplicación significan "*más*" y la resta y la división significan "*menos*". Estas conceptualizaciones son difíciles de superar. Puede que no sean conscientes, pero proporcionan una base falsa sobre la que construir matemáticas más complejas. Y con este fallo constante surge el desánimo inevitable y la convicción de que el individuo no tiene el tipo de mente (o cerebro) adecuada para las matemáticas.

Los niños también tienen frecuentemente problemas para leer los numerales con más de un dígito. Pueden arreglárselas con 47, donde la parte del "*cuatro*" se dice antes de "*siete*", pero tienen dificultades con 17 o 217, donde los números no se dicen en el orden en que se escriben. Además tienen problemas con cualquier número que incluya ceros (2007 o 207), porque el cero no es un número de los de contar.

Por la misma razón, muchos niños tienen dificultades en comprender que las fracciones son números; y es que normalmente no contamos menos de números enteros.

Los niños deben aprender que con excepción de los números entre 13 y 19, los números con más de un dígito se leen de izquierda a derecha (como las oraciones en lenguaje escrito), aunque los cálculos se realicen de derecha a izquierda (sumar, restar o multiplicar las unidades antes de las decenas, y las decenas antes de las centenas) – excepto en el caso de las divisiones, donde todo se realiza de izquierda a derecha.

Todas estas cosas, que parecen obvias a cualquiera que las pueda realizar, resultan confusas e incluso irracionales para muchos estudiantes.

La solución para todos estos problemas pedagógicos se cree que es la enseñanza y la práctica aplicada específicamente a los procedimientos con los que el estudiante tiene dificultad. Si el estudiante tiene dificultad en llevarse o en multiplicar números menores que uno, se le enseñará a llevarse y a multiplicar por números menores que uno, a fuerza de repetición y retroalimentación, de acuerdo con el criterio común. Pero el problema viene de mucho más atrás, del hecho de que al adquirir las destrezas básicas sobre la suma y la resta con un solo número, los niños aprendieron conceptos que iban a interferir con el posterior aprendizaje.

El punto de vista del recuento hace que se considere a los números enteros más "*fáciles*" que los demás números. Se prefieren los problemas como 2, 8 x 6 antes que el idéntico 6 x 2, 8, y las mismas trasposiciones se pueden hacer para el caso de la división (prefieren 2,8 ÷ 6 que 6 ÷ 2,8), donde la inversión constituye una diferencia sustancial.

88.- Las dificultades que pueden surgir cuando se adopta el recuento como base para las matemáticas han sido ampliamente reconocidas. Una alternativa común es enseñar alguna forma de reagrupamiento, por la que los números relacionados en el proceso matemático pueden reorganizarse en modelos distintos, centrándose con frecuencia en múltiplos de 10. estos nuevos modelos reducen la necesidad que tienen los niños de contar hacia delante y les hacen ver las estructuras interdependientes de los números. por ejemplo, en vez de enseñarles a calcular 7 + 6 contando hacia delante hasta 13, los estudiantes primero aumentarán el 7 hasta 10 (quitándole 3 al 6) y a continuación sumarán el 3 restante para conseguir un total de 13. Del mismo modo, 14 – 5 se resolvería quitando 4 al 5 para reducir 14 a 10 y a continuación deduciendo el 1 restante para alcanzar la solución de 9. Con práctica y conocimientos, la reagrupación no es tan complicada como podría resultar. Muchos niños reagrupan de modo espontáneo. También los adultos lo hacen cuando suman largas columnas de cifras, sin ser del todo conscientes de lo que están haciendo. La reagrupación puede evitar algunos de los errores de llevarse y prestar y además tiene la ventaja de que se reorganizan los números en grupos en los que los modelos y las estructuras matemáticas son obvias y productivas. (Ver KAMII, 1985, 1989, 1994, 2000).

Las estrategias de recuento permiten a los estudiantes completar las tareas que se les exigen tanto el profesor como los materiales educativos, pero es posible que lleguen a la conclusión siguiendo caminos que el profesor no sospecha ni se da cuenta de que supondrán posteriormente un serio menoscabo[88].

Irónicamente, lo que en un principio hace que los niños parezcan competentes en los ejercicios con aptitudes básicas resulta ser un perjuicio en su posterior progreso. Encuentran formas de conseguir gran velocidad por la superficie del agua, pero no consiguen el empujón necesario para despegar.

El dilema al que se enfrentan los profesores cuando tratan de entender lo que ocurre en la mente del niño también supone un dilema para los investigadores, quienes posiblemente no estén examinando lo que piensan y proclaman estar investigando. La situación no mejora por el hecho de que tanto la evaluación como la investigación tiendan a centrar su atención en los aspectos de las matemáticas que resultan "*obvios*" y fáciles de contar y medir.

Problemas con las palabras

Se cree que las matemáticas pueden ser más significativas, y la enseñanza de ellas más efectiva, si los procedimientos y los problemas matemáticos se presentan en forma de lenguaje cotidiano. Se cree que los niños se sentirán más cómodos usando números y operaciones numéricas simples en situaciones "*auténticas*" del lenguaje natural.

Pero existen dudas de si los "*problemas de palabras*" – que incluyen (o esconden) aplicaciones matemáticas en "*relatos*" – hacen algo por mejorar la comprensión matemática.[89] Esos problemas se deben desarrollar y usar cuidadosamente de forma que fomenten entre los niños el deseo por desarrollar técnicas computacionales relevantes. De otro modo, los niños fácil pero conscientemente subvertirán los objetivos de los profesores mostrando la misma originalidad e inventiva que muestran en situaciones puramente matemáticas.

Por ejemplo, solucionarán problemas con palabras (con éxito) gracias a la sabiamente inventada estrategia de buscar palabras clave. "*Más*" se toma con el significado de sumar y "*menos*" con el de restar.[90] Se guiarán por el tamaño de los números, el tipo de números y el número de números que aparecen en los problemas para determinar si deberían sumar, restar o multiplicar.[91]

Los niños parecen ganar control pero en realidad lo que hacen es encontrar señales y atajos prácticos que al final constituyen un obstáculo para su posterior progreso. Normalmente prefieren sus propios procedimientos inventados antes que los procedimientos formales que no comprenden.

Muchos niños harán lo imposible por evitar leer y analizar el lenguaje intentando solucionar los problemas de palabras. Existen buenas razones para ello. Las estructuras matemáticas no son fáciles de ocultar con problemas de palabras, y el mismo problema matemático puede estar incluido en diferentes estructuras lingüísticas. La capacidad oral por sí sola no es suficiente para solucionar los problemas de palabras[92], ni es signo de dominio en la computación.

Los errores se cometen de modo consistente, no porque los estudiantes no estén pensando, sino porque encuentran con rapidez la palabra clave que están buscando. Los estudiantes que consiguen más respuestas correctas (los de mejores aptitudes) normalmente necesitan más tiempo, porque reflexionan más.[93]

89.- Existe la idea popular de que el aprendizaje de las matemáticas tendrán lugar solamente si los niños hablan de los "*problemas*", pero eso depende de si existen ideas de las que hablar. Se pueden encontrar argumentos interesantes a favor y en contra del valor de incluir problemas matemáticos en relatos en BICKMORE-BRAND (1990). WOOD (1988) afirma que "*hacer relevantes las matemáticas a los niños invocando imágenes habituales no solamente no servirá para simplificar sus problemas, sino para hacérselos más difíciles*" (p.199). Véase además BACKHOUSE, HAGGARTY, PIRIE y STRATTON (1992).

90.- DE CORTE y VERCHAFFEL (1989, p.94)

91.- MANGAN (1989, p.115)

92.- MANGAN (1989, p.113)

93.- MULHERN (1989, p. 36)

Otro medio destacado de hacer que las matemáticas sean prácticas es implicar a los niños en actividades de estimación. Es cierto que las matemáticas prácticas de los adultos con frecuencia incluyen la estimación – en los presupuestos, en las tasas de los impuestos, en el cálculo de totales mientras se compra, se da propina y se revisa el cambio. Pero la estimación no forma parte de las matemáticas; es una aplicación práctica. Las matemáticas son precisas, e intentar enseñar la estimación como parte de las matemáticas confunde a los niños y los lleva a esforzarse por evitarlas. Una estrategia que los niños han inventado para los problemas de estimación consiste en realizar el cálculo justo y luego redondear al alza o a la baja.

Muchos niños de infantil son capaces de dar sentido a los problemas de sumar y restar incluso cuando no ven la evidencia – por ejemplo, cuando se les pregunta cuántos niños habrá en una tienda si dos ya están allí y faltan dos por llegar. Pero si se les presenta el mismo problema con notación matemática formal (2 + 2 = ?) serán incapaces de encontrarle sentido.[95] Los niños también tendrán problemas con el signo igual (=): piensan que es una orden para hacer algo.[96]

Fomentar una mente matemática

Puesto que las matemáticas deben provenir de la mente del estudiante, de aquí se deriva que ningún grupo o secuencia de principios educativos garantizarán el aprendizaje. Lo que importa es si el estudiante se siente confuso o desanimado cuando se encuentra con las matemáticas.

El fracaso con el método educativo no significa que el niño sea incapaz de comprender las matemáticas; significa que el niño – en ese momento y con esos materiales – está confuso o perplejo. Ese fracaso no exige que el niño deba recibir una educación o una práctica intensivas por parte del programa educativo que le está causando las dificultades, sino más bien, es necesario que la dificultad de esa parte del programa se identifique y se evite. Por desgracia, esta no suele ser la opinión del profesor, quien considera que la dificultad ocasional que algunos niños muestran es un reto, o el punto de vista del curriculum. Y muchos padres tampoco ayudan. Ellos sobrevivieron a las matemáticas de la escuela, así que ¿Por qué no lo iban a hacer sus hijos?

Al igual que el fracaso no significa incapacidad, así el éxito, en forma de respuestas correctas, no garantiza que el niño esté aprendiendo nada útil o productivo. La efímera sensación de éxito al conseguir buenas notas se viene abajo cuando a continuación llega la imposibilidad de enfrentarse a situaciones más complejas. "*El pánico a las matemáticas*" se considera una causa persistente de fracaso, a resultas de aprender la técnica sin comprenderla.[96]

Los niños se verán abrumados al enfrentarse a demasiada información de una vez – por ejemplo, los números largos y el sistema de colocación. Se pueden frustrar por miedo al fracaso, por una repetida inmersión en algo que no comprenden, por falta de tiempo y por extraños miedos, como la ortografía, el orden, los exámenes y las notas. La mayoría de las soluciones de apoyo y tutoriales destacan el uso de los números y el recuento. Con frecuencia no consiguen reconocer que las matemáticas no se pueden explicar con el lenguaje diario ni se pueden aprender de memoria, que lo que al profesor le parece obvio dista mucho de parecérselo al alumno, y que la capacidad para hacer algo no significa necesariamente que se haya entendido.

Los estudiantes se enfrentan a muchos tipos de dificultades. Localizar esas dificultades en el cerebro del estudiante y darles nombres pseudo- médicos sirve de bien poco. Lo que hace falta es más tiempo, más comprensión, más sensibilidad, menos presión, un enfoque de la educación de las matemáticas fundamentalmente diferente, acentuar la comprensión más que la memorización – y en ocasiones, un periodo de convalecencia mental.

94.- Hughes (1986, Cáp. 3)
95.- Hughes (1986, Cáp. 7)
96.- Buxton (1991)

Los "*consejos prácticos*" para el profesor tampoco sirven de nada. Resulta insultante sugerirles que sus problemas desaparecerán solamente con cambiar de método. Por el contrario, deben sensibilizarse para reconocer si sus alumnos, tanto los que "*tienen éxito*" como todos los demás, están operando en un mundo de fragmentos de lenguaje o en el mundo de las matemáticas.

Todo el mundo puede pensar matemáticamente. Que determinados individuos desarrollen su potencial o no depende con mucho de sus encuentros iniciales con el mundo de las matemáticas y con el muro de cristal.

REFERENCIAS

BACKHOUSE, JOHN, LINDA HAGGARTY, SUSAN PINE, AND JUDE STRATTON (1992): *Improving the Learning of Mathematics*. Portsmouth, NH, Heinemann.

BAROODY, ARTHUR J. (1987): *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, Primary, and Special Education Teachers*. New York, Teachers College Press.

BAROODY, ARTHUR J. (1995): *The role of the number-after rule in the invention of computational shortcuts. Cognition and Instruction*, 13(2), 189-219

BARTHES, ROLAND (1980). *Introduction to the structural analysis of narratives*. In A.K. Pugh, V. J. Lee, and J. Swann (Eds.): Language and Language Use. London, Heinemann Educational Books. Also in Shirley Brice Heath (Ed. And Trans.). (1977). Image—Music—Text. London, Fontana/Collins.

BEILIN, HARRY (1976): *Constructing cognitive operations linguistically*. In Hayne W. Reese (Ed.): *Advances in Child Development and Behaviour* (Vol. 11). New York, Academic Press.

BERLINSKI, DAVID (1997): *A Tour of the Calculus*. New York, Vintage Books

BICKMORE-BRAND, JENNIE (1990): *Language in Mathematics*. Australian Reading Association.

BOWER, THOMAS G. R. (1971): *The object in the world of the infant*. Scientific American, 225, 30-47.

BRUNER, JEROME S. (1997): *Will cognitive revolutions ever stop?* In David Martel Johnson and Christina E. Emeling (Eds.): *The Future of the Cognitive Revolution*. New York, Oxford University Press.

BUXTON, L. (1991): *Math Panic*. Portsmouth, NH, Heinemann.

CAREY, SUSAN (1978): *The child as word learner.* In Morris Halle, J. Breslin, and George A. Miller (Eds.), *Linguistic Theory and Psychological Reality.* Cambridge, MA: MIT Press.

CARPENTER, THOMAS P., ELIZABETH FENNEMA, MEGAN LOEF FRANKE, LINDA LEVI, AND SUSAN B. EMPSON (Eds.) (1999): *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH, Heinemann.

COBB, PAUL, AND HEINRICH BAUERSFDD (Eds.). (1995): *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ, Eribaum.

CROMER, R. F. (1971): *The development of the ability to decenter in time*. British Journal of Psychology, 62(3), 353-365.

DE CORTE, ERIC, AND LIEVEN VERSCHAFFEL (1989): *Teaching word problems in the primary school: What research has to say to the teacher.* In Brian Greer and Gerry Mulhern (Eds.): *New Directions in Mathematics Education*. London, Routledge.

DEHAENE, STANISLAS (1997): *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics.* New York, Oxford University Press.

DEVLIN, KEITH (1997): *Mathematics: The Science of Patterns*. New York, Scientific American.

DEVLIN, KEITH (2000): *The Math Gene*. New York, Basic Books.

DONAKLSON, MARGARET (1978): *Children's Minds*, London: Fontana.

EASLEY, J. (1983): *A Japanese approach to arithmetic*. For the Learning of Mathematics, 3, 8-14.

FIELD, HARTRY (1980): *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism.* London, Blackwell.

FIELD, HARTRY (1989): *Realism, Mathematics, and Modality*. London, Blackwell.

FOSNOT, CATHERINE TWOMEY (Ed.). (1995): *Constructivism: Theory, Perspective, and Practice.* New York, Teachers College Press.

GELMAN, ROCHEL (1979): *Preschool thought. American Psychologist*, 34(10), 900-905.

GELMAN, ROCHEL, AND C. R. GALLISTEL (1978): *The Child's Understanding of Number.* Cambridge, MA, Harvard University Press.

GINSBURG, HERBERT R, AND BARBARA S. ALLARDICE (1984): *Children's difficulties with scho-*

ol mathematics. In Barbara Rogoff and Jean Lave (Eds.): *Everyday Cognition: Its Development in Social Context.* Cambridge, MA, Harvard University Press.

GREER, BRIAN, AND GERRY MULHERN (Eds.): (1989). *New Directions in Mathematics Education.* London, Routledge.

HARRIS, ROY (1995): *Signs of Writing.* London, Routledge.

HODGES, ANDREW (1985): *The Enigma of Intelligence.* London, Unwin.

HOLMES, DEBORAH L., AND FREDERICK J. MORRISON (1979): *The Child: An Introduction to Developmental Psychology.* Monterey, CA, Brooks/Cole.

HUGHES, MARTIN (1986): *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics.* London, Blackwell.

HURFORD, JAMES R. (1987): *Language and Number.* Oxford, Blackwell.

HUTTENLOCHER, JANELLEN, NANCY C. JORDAN, AND SUSAN COHEN LEVINE (1994): *A. mental model for early arithmetic.* Journal of Experimental Psychology: General, 123(3), 284-296.

KAMII, CONSTANCE (1985): *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory.* New York, Teachers College Press.

KAMII, CONSTANCE (1989): *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic, 2nd Grade: Implications of Piaget's Theory.* New York, Teachers College Press.

KAMII, CONSTANCE (1994): Young Children Continue to Reinvent Arithmetic, 3rd Grade: Implications of Piaget's Theory. New York, Teachers College Press.

KAMII, CONSTANCE (2000): *Young Children Reinvent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory (2nd. Ed.).* New York, Teachers College Press.

KAMII, CONSTANCE, AND ANN DOMINICK (1998): *The harmful effects of algorithms in grades 1-4.* In Lorna J. Morrow and Margaret J. Kenney (Eds.): *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics,* 1998 Yearbook. Reston,VA, National Council, of Teachers of Mathematics.

KLINE, MORRIS (1980): *Mathematics: The Loss of Certainty.* New York, Oxford University Press.

LAKOFF, GEORGE (1987): *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal About the. Mind.* Chicago, University of Chicago Press.

LAVE, JEAN, MICHAEL MURFAUGH, AND OLIVIA DE LA ROCHA (1984), *The dialectic of arithmetic in grocery shopping.* In Barbara Rogoff and Jean Lave (Eds.): *Everyday Cognition: Its Development in Social Context.* Cambridge, MA, Harvard University Press.

MANDLER, GEORGE, AND B. J. SHEBO (1982): *Subitizing: An analysis of its component processes.* Journal of Experimental Psychology: General, 111, 1-21.

MANGAN, CLARE (1989): *Multiplication and division as models of situations: What research has to say to the teacher.* In Brian Greer and Gerry Mulhern (Eds.): *New Directions in Mathematics Education.* London, Routledge.

MCNEILL, DANIEL, AND PAUL FREIBERGER. (1993): *Fuzzy Logic.* New York, Touchstone.

MULHERN, GERRY (1989): *Between the ears: Making inferences about internal processes.* In Brian Greer and Gerry Mulhern (Eds.), New Directions in Mathematics Education. London, Routledge.

NAGEL, THOMAS (1986): *The View from. Nowhere.* Oxford, Oxford University Press.

NELSON, KATHERINE (1985): *Making Sense: Development of Meaning in Early Childhood.* New York, Academic Press.

OLSON, DAVID. R. (1970): *Cognitive Development: The Child's Acquisition of Diagonality.* New York, Academic Press.

OLSON, DAVID R. (1994): *The World, on Paper: The Conceptual and Cognitive Implications of Writing and Reading.* Cambridge, Cambridge University Press.

POPPER, KARL R. (1972): *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach.* Oxford, Clarendon.

POPPER, KARL R. (1976): *Unended Quest: An Intellectual Autobiography*. London, Fontana/Collins.

ROSCH, ELEANOR, AND B. B. LLOYD. (1978): *Cognition and Categorization*. Hillsdale, NJ, Eribaum.

ROTMAN, BRIAN (1987): *Signifying Nothing: The Semiotics of Zero*. London, Macmillan.

SAXE, GEOFFREY B. (1991): *Culture and Cognitive Development: Studies in Mathematical Understanding*. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

SENNER, WAYNE (Ed.). (1989): *The Origins of Writing*. Lincoln, University of Nebraska Press.

SMITH, FRANK (1988): *Joining the Literacy Club*. New York, Teachers College Press.

SMITH, FRANK (1990): *To think*. New York, Teachers College Press.

SMITH, FRANK (1994): *Writing and the Writer (2nd Ed.)*. Hillsdale, NJ, Edbaum.

SMITH, FRANK (1998): *The Book of Learning and Forgetting*. New York, Teachers College Press.

SMITH, FRANK (1999): *Why systematic phonics and phonemic awareness instruction constitute an educational, hazard*. Language Arts, 77(2), 150-157.

SMITH, FRANK (2001): *Just a matter of time*. Phi Delta Kappan, 52(8), 572-576.

SMITH, KARAN B. (2000): *Effects of a cooperative teaching approach on. Math anxiety in beginning algebra*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 22(2), 1-17.

TSAMIR, PESSIA, RUTH SHEFFER, AND DINA TIROSH (2000): *Intuitions and Undefined operations: The cases of division by zero*. Focus on Learning Problems in Mathematics, 22(1), 1-16.

WALKERDINE, VALERIE (1982): *From context to text: A psycho semiotic approach to abstract thought*. In M. Beveridge (Ed.): *Children Thinking Through Language*. London, Arnold.

WALKERDINE, VALERIE (1988): *The Mastery of Reason*. London, Routledge.

WOOD, DAVID (1988): *How Children Think and Learn*. Oxford, Blackwell.

WOODWORTH, ROBERT S., AND HAROLD SCHLOSBERG (1954): *Experimental Psychology*. New York, Holt, Rinehart & Winston.

Este libro desea proporcionar un conocimiento profundo a los lectores interesados en las matemáticas, a quienes les gustaría conocer mejor cómo aprender matemáticas (o cómo enseñarlas), o que pudieran estar interesados en llegar a comprender porqué es tan difícil aprender matemáticas (o enseñarlas). La discusión podría interesarles a los profesores implicados en cualquiera de los aspectos de la enseñanza primaria, a cualquiera que tenga que ver con las matemáticas, el lenguaje, el pensamiento y el potencial del cerebro humano (o mejor dicho, de los seres humanos) en general.

El libro no trata de poner de manifiesto cómo deberían enseñarse las matemáticas, excepto por la constante reiteración de que se deben aprender con la comprensión. No existen testimonios sobre métodos o materiales específicos, porque a la larga no sirven. Lo que marca la diferencia en el aprendizaje es la comprensión, no cómo las matemáticas se relacionan con el mundo físico, sino los tipos de relaciones que existen dentro de las matemáticas. Lo que marca la diferencia en la enseñanza es conocer lo que cada estudiante encuentra interesante y comprensivo, más que frustrante y difícil. La enseñanza y el aprendizaje dependen del conocimiento compartido, que no es algo que los métodos y materiales didácticos puedan generar o que las guías curriculares puedan decretar.